INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL II

Modelos Analíticos de Stocks

2ª Parte – Modelos Aleatórios e em Futuro Incerto

Manuel Ramalhete
2020

Nota. Esta apresentação é baseada nas aulas ministradas pelo autor na disciplina de Investigação Operacional II (IO II), do curso de Matemática Aplicada à Economia e à Gestão (MAEG). No entanto, alguns aspectos constantes deste texto, nomeadamente alguns desenvolvimentos adicionais, não são apresentados nas aulas da disciplina e podem ser retirados sem qualquer perda de generalidade.

Manuel Ramalhete

INDICE

INDICE

15. Modelos Aleatórios de Período Único

Até agora todas as variáveis exógenas do modelo foram supostas conhecidas. Na vida real nem sempre acontece tal situação. As duas variáveis mais sujeitas a situações de incerteza são o prazo de reaprovisionamento e a procura do produto, ou dos produtos, sobretudo esta última.

Em teoria, existem diversos níveis de incerteza sobre uma variável ou qualquer fenómeno em geral, variando desde a situação de incerteza máxima, em que nada se conhece sobre essa variável ou esse fenómeno, até à situação em que se conhece o seu comportamento probabilístico, isto é, a situação em que se conhece a respectiva distribuição de probabilidade, caso em que o modelo é chamado de aleatório. Também se diz neste caso - modelos aleatórios - que estamos perante um problema de decisão face ao risco (Bento Murteira). Alternativamente, podemos ter situações de "incerteza absoluta", em que se desconhece completamente o comportamento das variáveis, até outras situações de "incerteza intermédia", em que se conhecem por exemplo alguns momentos da variável aleatória em questão, por exemplo a média e a variância, mas se desconhece a distribuição de probabilidade (como se sabe, podemos ter uma infinidade numerável de distribuições de probabilidade com a mesma média e a mesma variância). Quando se conhece a distribuição de probabilidade, pode calcular-se, caso existam, a sua média e a sua variância (há distribuições de probabilidade que não têm variância, caso da distribuição de Cauchy, pois o integral para obter a variância diverge). Em todas as situações em que não se conhece o comportamento probabilístico das variáveis diz-se que o modelo é um modelo em futuro incerto e o problema de decisão é um problema de decisão face á incerteza (Bento Murteira).

Deve notar-se que os modelos de incerteza máxima não têm interesse prático, pois quando se produz ou comercializa um produto existe, naturalmente, algum conhecimento sobre o mesmo. Digamos que em muitas situações, na prática comercial, se conhece o comportamento probabilístico da ou das variáveis, situação que configura os modelos aleatórios, mas também existem, embora menos frequentes, situações em que se conhecem apenas aspectos parciais do comportamento de variáveis sujeitas a incerteza.

Este capítulo e os próximos têm em conta a incerteza na procura, a principal variável sujeita a incerteza e, em complemento, algumas situações de incerteza no prazo de reaprovisionamento. Começamos pelos modelos de período único.

O modelo de período único, ou modelo estático, é essencialmente caracterizado pelo estudo de um só período, que pode ser um dia, uma época do ano, uma estação, ou qualquer outro intervalo de tempo. Este intervalo de tempo é finito e nele apenas se toma uma decisão de encomenda, caracterizada pelo montante a encomendar para fazer face à procura nesse período.

Existem inúmeras situações em que estamos perante um problema deste tipo. Por exemplo, a gestão de peças sobressalentes para um determinado período, a gestão de produtos perecíveis, ou produtos de moda, etc., mas as duas situações mais típicas são a gestão quanto á quantidade de jornais a encomendar, por exemplo diariamente, ou a decisão quanto ao numero de árvores de Natal a encomendar para fazer face á procura durante esta época festiva. Por isso este modelo é também conhecido como o "*Modelo da Árvore de Natal*" e "*Modelo do Vendedor de Jornais".*

Em contexto determinístico, o modelo de período único tem uma decisão trivial: encomenda-se exactamente a quantidade prevista, que é conhecida. Em contexto de incerteza, a situação é diferente, pois não sabemos de forma exacta qual vai ser a procura. Por isso, este modelo é apenas agora abordado.

15.1 Modelo Sem Stock e Sem Custo de Encomenda

Vamos supor que a distribuição da procura para o período em causa é conhecida e que não existem unidades em stock (de qualquer eventual encomenda anterior) nem custos fixos associados à realização da encomenda.

Seja:

$\boldsymbol{V}$ – Preço de venda do produto

$\boldsymbol{C}$ – Custo unitário do produto

$\boldsymbol{v}$ – Preço de venda após o período (venda em saldo)

$\boldsymbol{p_v}$ – Custo de ruptura em sentido estricto, isto é, custo adicional por unidade em ruptura (falta). É um custo unitário variável.

$\boldsymbol{h}$ – Custo de posse, por unidade em stock no fim do período

$\boldsymbol{X}$ – Variável aleatória procura no período, com função de probabilidade (no caso discreto) ou de densidade de probabilidade (no caso contínuo), $f(x)$, conhecida.
$\boldsymbol{Q}$ – Quantidade a encomendar para o período
$\boldsymbol{G}$ – Ganho no período

Como $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{h}$ dependem igualmente do stock no fim do período, considera-se $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{h}$ como sendo o preço de venda líquido após o período.

O Ganho no período é dado pela seguinte função de variável aleatória:

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q}) = \begin{cases} \boldsymbol{VX} - \boldsymbol{CQ} + \boldsymbol{l}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{X}) & \boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{VQ} - \boldsymbol{CQ} - \boldsymbol{p_v}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Q}) & \boldsymbol{X} > \boldsymbol{Q} \end{cases}$$

Nota. A opção pela realização da encomenda supõe que o Valor Esperado do Ganho é não negativo, isto é, $E[\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q})] \geq 0$, ou então está justificada por qualquer outra razão estratégica. No caso de o preço de venda ser desconhecido, supõe-se igualmente que a realização da encomenda não está em causa, mantendo-se por isso a comercialização do produto.

Sendo a procura uma variável aleatória discreta, o valor esperado do é dado por

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q})] = \sum_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{Q}} [\boldsymbol{Vx} - \boldsymbol{CQ} + \boldsymbol{l}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{x})]\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \sum_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{1}}^{\infty} [\boldsymbol{VQ} - \boldsymbol{CQ} - \boldsymbol{p_v}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{Q})]\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

ou seja, após alguns simplificações, e sabendo que $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{\mu}$, vem

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q})] = (\boldsymbol{V} - \boldsymbol{l})\boldsymbol{\mu} - (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{l})\boldsymbol{Q} - (\boldsymbol{V} + \boldsymbol{p_v} - \boldsymbol{l}) \textstyle\sum_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{1}}^{\infty} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{Q})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \qquad (3.63)$$

Para evidenciar as componentes que formam o ganho esperado, a expressão (3.63) pode ser apresentada na seguinte forma:

$$\boldsymbol{E[G(Q)] = V\mu - CQ \ + l[Q - \mu + \textstyle\sum_{x=Q+1}^{\infty}(x-Q)f(x)] \ - (V + p_v)\sum_{x=Q+1}^{\infty}(x-Q)f(x)} \qquad (3.63a)$$

As condições para que $\boldsymbol{Q}^*$ seja um maximizante deste valor esperado são

$$E[\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q}^*)] \geq E[\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q}^* + \boldsymbol{1}))]$$

$$E[\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q}^*)] \geq E[\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{1})]$$

Ou seja, após simplificações, deverá verificar-se

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} \geq \boldsymbol{Q}^*) \geq \frac{\boldsymbol{C}-\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{V}+\boldsymbol{p_v}-\boldsymbol{l}} \geq \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} \geq \boldsymbol{Q}^* + \boldsymbol{1}) \qquad (3.64)$$

Se designarmos por $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} \geq \boldsymbol{x})$ a função de distribuição complementar, a expressão anterior vem

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{Q}^*) \geq \frac{\boldsymbol{C} - \boldsymbol{l}}{\boldsymbol{V} + \boldsymbol{p_v} - \boldsymbol{l}} \geq \boldsymbol{H}(\boldsymbol{Q}^* + \boldsymbol{1})$$

Isto é, $\boldsymbol{Q}^*$ deverá ser o menor valor para $\boldsymbol{Q}$ tal que

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{1}) \leq \frac{\boldsymbol{C} - \boldsymbol{l}}{\boldsymbol{V} + \boldsymbol{p_v} - \boldsymbol{l}}$$

Se designarmos por $\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x)}$ a função de distribuição da variável aleatória $\boldsymbol{X}$**,** então $\boldsymbol{Q^*}$ deverá ser o menor valor para $\boldsymbol{Q}$ tal que

$$\boldsymbol{F(Q) \geq \frac{V+p_v-C}{V+p_v-l}} \qquad (3.65)$$

Fazendo $\boldsymbol{p = V + p_v}$, isto é, receita que se deixa de ter devido à ruptura mais o custo de ruptura em sentido estrito, vindo para expressão anterior

$$\boldsymbol{F(Q) \geq \frac{p-C}{p-l}}$$

Nota. A função de distribuição complementar $\boldsymbol{H(x)}$ é de utilização directa muito frequente em modelos aleatórios de stocks, embora, quando é o caso, seja mais frequente estar tabelada a função de distribuição $\boldsymbol{F(x)}$*,* daí que se explicitem as expressões nesta última.

Sendo a procura uma variável aleatória continua, o valor esperado do é dado por

$$\boldsymbol{E[G(Q)] = \int_0^Q [Vx - CQ + l(Q-x)]f(x)dx + \int_Q^\infty [VQ - CQ - p_v(x-Q)]f(x)dx}$$

ou seja, após alguns simplificações,

$$\boldsymbol{E[G(Q)] = (V-l)\mu - (C-l)Q - (V+p_v-l)\int_Q^\infty (x-Q)\,f(x)dx} \qquad (3.66)$$

À semelhança do caso discreto, a expressão (3.66) pode ser apresentada na seguinte forma:

$$\boldsymbol{E[G(Q)] = V\mu - CQ + l[Q - \mu + \int_Q^\infty (x-Q)f(x)dx] - (V+p_v)\int_Q^\infty (x-Q)f(x)dx} \qquad (3.66a)$$

ou ainda

$$\boldsymbol{E[G(Q)] = (V-l)\mu - (C-l)Q - (V+p_v-l)\left[\int_Q^{\infty} x\,f(x)dx - QH(Q)\right]}$$

Para que este valor esperado seja máximo, vem

$$\boldsymbol{\frac{dE[G(Q)]}{dQ} = -(C-l) - (V+p_v-l)[Qf(Q) - Qf(Q) - H(Q)] = 0}$$

isto é,

$$\boldsymbol{P(X \geq Q^*) = H(Q^*) = \frac{C-l}{V+p_v-l}}$$

ou

$$\boldsymbol{F(Q^*) = \frac{V+p_v-C}{V+p_v-l} = \frac{p-C}{p-l}} \qquad (3.67)$$

sendo $\boldsymbol{F(Q^*)}$ o valor da função de distribuição de $\boldsymbol{X}$ no ponto $\boldsymbol{Q^*}$.

Nota 1. Quando a variável aleatória é uma normal, da Teoria das Probabilidades sabe-se que

$$\boldsymbol{\int_Q^{\infty}(x-Q)f(x)dx = \sigma\phi\left(\frac{Q-\mu}{\sigma}\right) + (\mu-Q)\left[1-\Phi\left(\frac{Q-\mu}{\sigma}\right)\right]} \qquad (3.68)$$

expressão que indica que o valor esperado das perdas, e em que $\boldsymbol{\phi\left(\frac{Q-\mu}{\sigma}\right)}$ é a função de densidade estandardizada e $\boldsymbol{\Phi\left(\frac{Q-\mu}{\sigma}\right)}$ a função de distribuição estandardizada. Por outro lado, com muita utilidade nos modelos de stocks, define-se a função $\boldsymbol{NL(y)}$, *Função de Perdas Normal*, designada em inglês por *Normal Loss function*, que decorre da distribuição normal,

$$NL(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y})[\mathbf{1} - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y})] \qquad (3.69)$$

que habitualmente está tabelada.

Fazendo $y = \frac{\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}$, vem para (3.67)

$$\int_{\boldsymbol{Q}}^{\infty}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{\sigma}\left\{\boldsymbol{\phi}\left(\frac{\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}\right) - \left(\frac{\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}\right)\left[\mathbf{1} - \boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}\right)\right]\right\} = \boldsymbol{\sigma NL}\left(\frac{\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}\right) \qquad (3.70)$$

que indica que, no caso de procura normal, o número esperado de rupturas é proporcional ao seu desvio padrão, multiplicado pelo valor da “Função Perdas Normal” (*Normal Loss*) no ponto indicado.

Nota 2. A função $NL(\boldsymbol{y})$ não está tabelada para valores negativos de $\boldsymbol{y}$, pois prova-se que quando $\boldsymbol{y} \leq \mathbf{0}$

$$\boldsymbol{NL}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{NL}(-\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y}$$

Exemplo 19. Uma empresa vai instalar um equipamento complexo numa das suas linhas de montagem e pretende determinar quantas componentes de peças de substituição deve adquirir em relação a um elemento importante desse equipamento. A componente custa agora 10 000 €. Porém, se for comprada posteriormente à instalação do equipamento terá que ser fabricada por encomenda e custará 250 000 €. No fim do período de vida útil do equipamento, estima-se que as componentes em sobra possuem um valor residual de 6 000 €. Prevê-se que o equipamento dure *5 anos* e que, durante esse período o número de substituições obedeça a uma distribuição de *Poisson* com média *2 unidades*. Sem ter em conta o valor temporal do dinheiro (não considerar taxa de actualização), pretende saber-se quantas peças encomendar com o equipamento.
Formalmente a função de Ganhos apresenta-se da seguinte forma:

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q}) = \begin{cases} -\mathbf{10\,000}\boldsymbol{Q} + \mathbf{6\,000}(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{X}) & \boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{Q} \\ -\mathbf{10\,000}\boldsymbol{Q} - \mathbf{250\,000}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Q}) & \boldsymbol{X} > \boldsymbol{Q} \end{cases}$$

Vamos obter $\boldsymbol{Q^*}$, o qual deverá ser o menor valor para $\boldsymbol{Q}$ tal que

$$\boldsymbol{F(Q) \geq \frac{250\,000-10\,000}{250\,000-6\,000} = 0,984}$$

Através da tabela da distribuição de *Poisson*, com média igual a $\mathbf{2}$, verifica-se que $\boldsymbol{Q^* = 6}$, pois $\boldsymbol{F(6) = 0,9955 > 0,984}$, sendo o menor $\boldsymbol{Q}$ a verificar a condição: $\boldsymbol{F(5) = 0,9834 < 0,984}$

O custo esperado, que é dado por $\boldsymbol{-E[G(Q)]}$, pode ser obtido através da expressão (3.63):

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{Custo\ Esperado = -E[G(Q)]}\\&\boldsymbol{= 6\,000 * 2 + (10\,000 - 6\,000) * 6 + (250\,000 - 6\,000) * (1 * f(7) + 2 * f(8) + 3 * f(9) + \cdots)}\\&\boldsymbol{= 36\,000 + 244\,000 * (0,0034 + 0,0018 + 0,0006) = 37\,415\ €}\end{aligned}$$

Se utilizarmos a expressão (3.63a), este custo esperado é o resultado, respectivamente, dos custos de aquisição das peças, das receitas esperadas de vendas de peças sobrantes e dos custos esperados de ruptura: $\boldsymbol{60\,000 - 24\,035 + 1450 = 37\,415\ €}$

Exemplo 20. Uma organização foi encarregada de realizar uma grande convenção daqui a 6 meses e precisa de decidir quantos quartos reservar no hotel da conferência. Os quartos reservados agora custam \$50, mas ainda não se sabe quantas pessoas virão à convenção. Pensa-se que o número de quartos necessários seguirá uma distribuição normal com média 3 000 quartos e desvio padrão 300. Se reservarem quartos a menos, a organização garante, por sua conta, quartos extra, mas vai ter de gastar por cada um \$80 e, como são mais distantes, tornam-se incómodos e têm custos adicionais com deslocações, estimados em \$10 por quarto.
Quando se iniciar a convenção, os quartos reservados mas não necessários podem ser devolvidos à gerência que devolve 30% do valor cobrado. A organização pretende decidir quantos quartos reservar já para a convenção.

Sendo $\boldsymbol{Q}$ o número de quartos a reservar, a função de custos apresenta-se da seguinte forma

$$\boldsymbol{CT(Q)} = \begin{cases} \boldsymbol{50Q - 15(Q - X)} & \boldsymbol{X \leq Q} \\ \boldsymbol{50Q + 90(X - Q)} & \boldsymbol{X > Q} \end{cases}$$

Como no modelo teórico utilizamos uma função de ganhos, passamos à sua simétrica,

$$\boldsymbol{G(Q)} = \begin{cases} \boldsymbol{-50Q + 15(Q - X)} & \boldsymbol{X \leq Q} \\ \boldsymbol{-50Q - 90(X - Q)} & \boldsymbol{X > Q} \end{cases}$$

Vamos obter $\boldsymbol{Q^*}$, o qual deverá ser tal que

$$\boldsymbol{F(Q^*) = \frac{V + p_v - C}{V + p_v - l} = \frac{90 - 50}{90 - 15} = 0,533}$$

Através da distribuição normal, verificamos que $\boldsymbol{Q^* \approx 3\,025.}$ Portanto, devem ser reservados 3 025 quartos. O custo esperado é dado por:

$$\boldsymbol{E[CT(Q)] = 15 * 3\,000 + (50 - 15) * 3\,025 + (90 - 15)\int_{3\,025}^{\infty}(x - 3\,025)f(x)dx}$$

Por outro lado, de acordo com (3.67) ou (3.69), vem

$$\boldsymbol{\int_{3\,025}^{\infty}(x - 3\,025)f(x)dx = 300 * NL\left(\frac{3\,025 - 3\,000}{300}\right) = 300 * NL(0,08) \approx 300 * 0,36 = 108,1}$$

vindo $\boldsymbol{E[CT(Q)] \approx 158\,980\,\$}$.

Nota 1. Obtêm-se os mesmos resultados minimizando o valor esperado dos custos, isto é, $\boldsymbol{minE[CT(Q)]}$.

Nota 2. Muitos autores formulam e desenvolvem o modelo de período único como um problema de minimização de custos, em lugar de um problema de maximização de ganhos, como nós fizemos. É fácil de verificar que em ambos os casos o tema é desenvolvido com toda a generalidade, embora a abordagem pelos ganhos esperados nos pareça mais fácil de entender e, por isso, a utilizamos. Acontece que é preciso tratar adequadamente o custo de ruptura. Ilustremos com o exemplo apresentado.

Assim, suponha-se no exemplo anterior que a organização cobra a cada participante $70\$$ por participar na conferência, sendo-lhe garantido o alojamento. Vamos verificar que a maximização do ganho da organização conduz à mesma decisão. Os parâmetros do modelo são: $\boldsymbol{\mu = 3\,000}$; $\boldsymbol{\sigma = 300}$; $\boldsymbol{V = 70}$; $\boldsymbol{C = 50}$; $\boldsymbol{l = 15}$; $\boldsymbol{p_v = 20}$

Uma pequena explicação para o custo de ruptura em sentido estricto. Como a organização, no caso de ter de ocorrer ruptura, vai contratar quartos adicionais por $90\$$, isto significa que vai ter um custo adicional de $20\$$, pois cobra $70\$$ aos participantes, vindo a função de ganhos

$$\boldsymbol{G(Q) = \begin{cases} 70X - 50Q + 15(Q - X) & X \le Q \\ 70Q - 50Q - 20(X - Q) & X > Q \end{cases}}$$

sendo a solução óptima dada por

$$\boldsymbol{F(Q^*) = \frac{V + p_v - C}{V + p_v - l} = \frac{70 + 20 - 50}{70 + 20 - 15} = 0,533}$$

ou seja, $\boldsymbol{Q^* \approx 3\,025}$, como anteriormente. O ganho esperado é dado por:

$$\boldsymbol{E[G(\,Q^*)] = (V - l)\mu - (C - l)\ Q^* - (V + p_v - l) \int_{Q^*}^{\infty} (x - Q^*)\, f(x) dx}$$

$$\boldsymbol{E[G(3\,025)] = (70 - 15) * 3\,000 + (50 - 15) * 3\,025 + (70 + 20 - 15) * 108,1 = 3\,000 * 70\ \$ - 158\,980\ \$ \approx 51\,021\ \$}$$

15.2 Modelo Com Stock e Sem Custo de Encomenda

A diferença em relação ao caso anterior reside na existência de unidades em armazém. Pode acontecer que a realização de uma nova encomenda não se justifique, dado que o stock existente está em condições de satisfazer a procura tendo em conta a maximização do ganho esperado. Trata-se de avaliar qual a melhor decisão, encomendar ou não, e no primeiro caso, qual o montante. A análise será feita para o caso contínuo, mas as conclusões mantêm-se no caso discreto.

Designando por $\boldsymbol{Q_0}$ o stock existente e por $\boldsymbol{Q}$ o montante a que o stock deve ser levado, a quantidade a encomendar será genericamente $(\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{Q_0})$, no caso de esta diferença ser positiva, sendo, naturalmente, nula no caso contrário. Mantendo as designações anteriores, a função de ganhos no período é então:

$$\boldsymbol{G(Q)} = \begin{cases} \boldsymbol{VX - C(Q-Q_0) + l(Q-X)} & \boldsymbol{X \leq Q} \\ \boldsymbol{VQ - C(Q-Q_0) - p_v(X-Q)} & \boldsymbol{X > Q} \end{cases}$$

Sendo o seu valor esperado, após simplificações, dado por

$$\boldsymbol{E[G(Q)] = (V-l)\mu - (C-l)Q + CQ_0 - (V+p_v-l)\int_Q^{\infty}(x-Q)f(x)dx} \qquad (3.71)$$

Como (3.71) difere de (3.66) apenas na constante $\boldsymbol{CQ_0}$, a solução óptima é, como se sabe, dada igualmente pelo valor $\boldsymbol{Q^*}$ a satisfazer

$$\boldsymbol{F(Q^*) = \frac{V+p_v-C}{V+p_v-l}}$$

sendo a quantidade a encomendar dada por $\boldsymbol{Q^* - Q_0}$. Em síntese:

- Se $\boldsymbol{Q_0} < \boldsymbol{Q}^*$, encomendar $\boldsymbol{Q}^* - \boldsymbol{Q_0}$
- Se $\boldsymbol{Q_0} \geq \boldsymbol{Q}^*$, não encomendar (não está contemplada a hipótese de devolver parte do produto).

Em conclusão, no caso de não haver custo de encomenda, é muito simples, e este modelo tem uma resolução semelhante à do anterior, apenas a quantidade óptima deve ser deduzida do stock existente para obter a quantidade a encomendar, como se esperava, embora o valor esperado dos ganhos difira na quantidade CQ_0, sendo neste último caso maior, visto ser necessário encomendar uma menor quantidade (em relação a 3.66, a expressão 3.71 tem mais a parcela CQ_0).

Imagine-se que no exemplo anterior, a organização já tinha reservado 100 quartos. A solução seria reservar $2\,925\ (= 3\,025 - 100)$ quartos.

15.3 Modelo Sem Stock e Com Custo de Encomenda

Esta situação é igualmente muito simples, pois em relação ao modelo apresentado em 15.1, apenas há que avaliar se o custo da encomenda não altera o sentido da decisão, podendo inviabilizar a sua comercialização. Se designarmos por $\boldsymbol{E}[\overline{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{Q})]$ o ganho esperado neste caso, este será o ganho esperado dado por (3.66) menos o custo com a encomenda, isto é,

$$\boldsymbol{E}[\overline{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{Q})] = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q})] - \boldsymbol{A}$$

Dado que $\boldsymbol{A}$ é uma constante, o maximizante $\boldsymbol{E}[\overline{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{Q})]$ é, evidentemente, o mesmo de $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q})]$, isto é, $\boldsymbol{Q}^*$que verifique a relação

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}^*) = \frac{\boldsymbol{V}+\boldsymbol{p_v}-\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{V}+\boldsymbol{p_v}-\boldsymbol{l}}$$

desde que $\boldsymbol{E[G(Q)]-A\geq 0}$, ou a decisão de encomendar seja justificada por outras razões, estratégicas ou de politica empresarial. No caso das receitas serem desconhecidas, a decisão de encomendar, ou não, precede a análise do montante a encomendar, objecto desta análise.

15. 4 Modelo Com Stock e Com Custo de Encomenda

Neste caso pretende satisfazer-se a procura durante um determinado período, mas existem ainda unidades em armazém e a encomenda tem um custo associado. Pode acontecer que a realização de uma nova encomenda não se justifique, uma vez que com o stock existente os ganhos esperados podem ser superiores aos obtidos com a realização da encomenda, visto os ganhos esperados, neste último caso, incluírem o custo com a realização da mesma. Trata-se de avaliar qual a melhor decisão, encomendar ou não, e no primeiro caso, qual o montante. A análise é um pouco mais complexa e será feita para o caso contínuo, mas as conclusões mantêm-se no caso discreto.

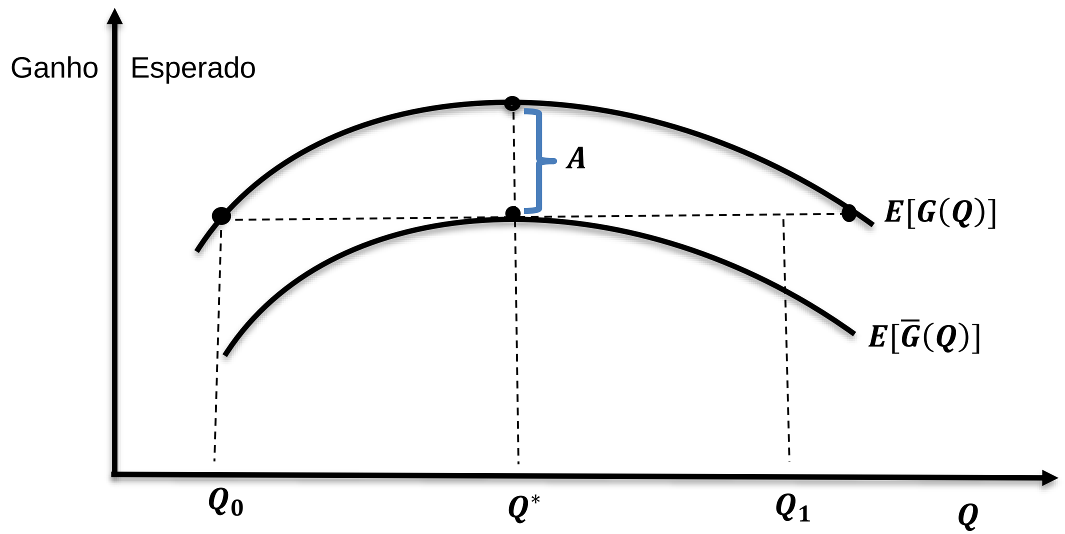
A análise será efectuada de modo a determinar o nível de stock a partir do qual deixa de se justificar a encomenda, ou seja o nível de indiferença. Seja $\boldsymbol{Q_0}$ esse nível de stock. Mantendo as designações anteriores, a expressão geral do ganho esperado, para levar a encomenda até $\boldsymbol{Q}$, é dada por

$$\boldsymbol{E[\overline{G}(Q)]=-A+(V-l)\mu-(C-l)Q+CQ_0-(V+p_v-l)\int_Q^{\infty}(x-Q)f(x)dx} \qquad (3.72)$$

que difere de (3.71) apenas por incluir o custo, $\boldsymbol{A}$, da encomenda. Ou seja, tem-se $\boldsymbol{E[\overline{G}(Q)]=E[G(Q)]-A}$. Claro que (3.71) e (3.72) têm a mesma solução óptima, visto $\boldsymbol{A}$ ser constante, e é dada pelo valor $\boldsymbol{Q^*}$ a satisfazer

$$\boldsymbol{F(Q^*)=\frac{V+p_v-C}{V+p_v-l}}$$

Através da representação gráfica das duas funções, que são paralelas, vamos analisar em que condições deve ser efectuada a encomenda.



Verifica-se pela figura acima, que o valor de Q_0 **(**$Q_0 < Q^*$**)** é determinado de modo a que seja $E[G(Q_0)] = E[\overline{G}(Q^*)]$, ou seja, o valor de stock existente que torna indiferente não encomendar ou fazer uma encomenda para levar o stock até Q^*e encomendar $Q^* - Q_0$, como se verifica no gráfico. Considerando a figura acima, sendo S_0 o stock existente**,** as situações a analisar são:

1. $S_0 < Q_0$
2. $Q_0 \leq S_0 \leq Q^*$
3. $S_0 > Q^*$

1. $\boldsymbol{S_0 < Q_0}$

Sendo o stock igual a $\boldsymbol{S_0}$, o ganho esperado será dado por $\boldsymbol{E[G(S_0)] = (V - l)\mu + lS_0 - (V + p_v - l)\int_{S_0}^{\infty}(x -}$

$$\boldsymbol{E[G(Q_0)] = (V-l)\mu \; + lQ_0 - (V+p_v-l)\int_{Q_0}^{\infty}(x-Q_0)f(x)dx =}$$

$$\boldsymbol{-A + (V-l)\mu - (C-l)Q^* + CQ_0 - (V+p_v-l)\int_{Q^*}^{\infty}(x-Q^*)f(x)dx = E[\overline{G}(Q^*)]}$$

Após simplificar, vem

$$\boldsymbol{(C-l)Q_0 + (V+p_v-l)\int_{Q_0}^{\infty}(x-Q_0)f(x)dx = A + (C-l)\,Q^* + (V+p_v-l)\int_{Q^*}^{\infty}(x-Q^*)f(x)dx} \qquad (3.73)$$

cuja resolução permite obter o valor de $\boldsymbol{Q_0}$. Nos caso em que resolução analítica não é fácil, ou mesmo possível, recorre-se a métodos iterativos ou através de um software conhecido.

Esta política é por vezes designada por ***Política*** $\boldsymbol{\langle Q_0;\ Q^*\rangle}$*.* A garantia de que esta política é óptima resulta das propriedades da convexidade de funções (a função de ganhos esperados é uma função côncava).

Exemplo 21 (adaptado de Hillier e Lieberman). Um grossista recebeu de um fornecedor habitual de bicicletas uma última proposta de aquisição de um modelo cuja produção vai ser descontinuada. Esta oportunidade oferecida pelo fornecedor tem um preço especial de 200 € por bicicleta e coincide com o período de Natal. O grossista apurou os seguintes dados:

- Os custos administrativos e de capital empatado relativos a uma bicicleta em inventário no fim do período de Natal são de 10 €;
- O preço de venda de cada bicicleta durante o período de Natal é de 450 €;
- A quantidade de bicicletas vendidas durante o período de Natal é uma variável aleatória com distribuição exponencial com média 1 000 unidades;
- O preço de venda de cada bicicleta nos saldos, a seguir ao Natal, é de 150 €;
- a encomenda tem um custo fixo de 1 000 €;

Pretende determinar-se a Política $\langle \boldsymbol{Q_0};\ \boldsymbol{Q^*}\rangle$.

$$\boldsymbol{V = 450\ €;\ C = 200\ €;}\ l = \boldsymbol{140\ €; A = 1\ 000\ €; \mu = 1\ 000;\ \ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1\ 000} e^{-\frac{x}{1\ 000}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases};\ \ F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{1\ 000}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}}$$

$\boldsymbol{F(Q^*) = \frac{p-C}{p-l} = \frac{450-200}{450-140} = 0,8065;\ 1 - e^{-\frac{Q^*}{1\ 000}} = 0,8065; Q^* = -1\ 000 * ln(1 - 0,8065) \approx 1\ 642}$ bicicletas

Igualando os ganhos esperados com e sem encomenda, tal como referido atrás, vem a equação

$$\boldsymbol{(C - l)Q_0 + (V + p_v - l)\int_{Q_0}^{\infty}(x - Q_0)f(x)dx = A + (C - l)\ Q^* + (V + p_v - l)\int_{Q^*}^{\infty}(x - Q^*)f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{60 * Q_0 + 310 * \int_{Q_0}^{\infty}(x - Q_0)f(x)dx = 1\ 000 + 60 * 1\ 642 + 310 * \int_{1\ 642}^{\infty}(x - 1\ 642)f(x)dx}$$

Sabe-se que quando $\boldsymbol{f(x)}$ é a função de densidade de uma variável exponencial

$\boldsymbol{\int_{1\ 642}^{\infty}(x - 1\ 642)\frac{1}{1\ 000}e^{-\frac{x}{1\ 000}}\ dx = 1\ 000e^{-\frac{1\ 642}{1\ 000}} = 193,6}$ e que $\boldsymbol{\int_{Q_0}^{\infty}(x - Q_0)\frac{1}{1\ 000}e^{-\frac{x}{1\ 000}}dx = 1\ 000e^{-\frac{Q_0}{1\ 000}}}$

vindo, finalmente, a seguinte equação

$$\boldsymbol{60Q_0 + 310 * 1\ 000\ e^{-\frac{Q_0}{1\ 000}} - 159\ 536 = 0}$$

cuja resolução indica $\boldsymbol{Q_0 = 1\,465}$. Ou seja, a política $\langle \mathbf{1465};\ \mathbf{1642}\rangle$ é a politica preconizada, que significa que se o número de bicicletas em stock for inferior a $\mathbf{1\,465}$ deve ser feita uma encomenda para levar o stock até ao nível $\mathbf{1\,642}$. No caso contrário não deve ser feita qualquer encomenda.

Nota 1. A equação anterior pode ser resolvida iterativamente, atribuindo valores sucessivos para $\boldsymbol{Q_0}$ de modo a obter um valor tão próximo quanto se pretenda, ou simplesmente utilizar o Solver. A resolução pelo Solver deu o valor indicado.

Nota 2. Tal como o gráfico ilustra, deve notar-se que a equação anterior tem duas raízes reais, $\mathbf{1\,465}$ e $\mathbf{1\,830,5}$. A segunda, pelas razões explicadas atrás (corresponde ao $\boldsymbol{Q_1}$ do gráfico anterior), deve ser eliminada.

Esta solução pode ser testada calculando o ganho esperado considerando um stock de $\mathbf{1\,465}$ bicicletas e não fazendo qualquer e encomenda e comparando-o com o ganho obtido partindo do mesmo stock e fazendo uma encomenda de $\mathbf{177}$ $(= \mathbf{1\,642} - \mathbf{1\,465})$ bicicletas. Com efeito:

$$\boldsymbol{E[G(Q_0)] = (V-l)\mu + lQ_0 - (V+p_v-l)\int_{Q_0}^{\infty}(x-Q_0)f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{= 310\,000 + 140 * 1\,465 - 310 * \int_{1\,465}^{\infty}(x-1\,465)f(x)dx = 450\,000 + 65\,100 - 310 * 231,1 \approx 443\,475\ €}$$

Por sua vez,

$$\boldsymbol{E[\overline{G}(Q^*)] = -A + (V-l)\mu - (C-l)Q^* + CQ_0 - (V+p_v-l)\int_{Q^*}^{\infty}(x-Q^*)f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{= -1\,000 + 310\,000 - 60 * 1\,642 + 200 * 1\,465 - 310 * 193,6 \approx 443\,475\ €}$$

como se esperava (os arredondamentos foram feitos no fim).

15. 5 Modelo Com Custos de Ruptura Fixo e Variáveis

Esta é uma situação mais geral em que o custo de ruptura pode ter uma componente variável, proporcional à dimensão da ruptura (nº de unidades em falta), designada por $\boldsymbol{p_v}$, tal como anteriormente, pois é idêntica, e uma componente fixa, independente da dimensão da rupura por $\boldsymbol{p_f}$. É fácil de constatar que os caso anteriores são casos particulares deste, em que $\boldsymbol{p_f = 0}$. Todas as variantes analisadas atrás podem pois ser deduzidas deste modelo base, embora com um desenvolvimento um pouco mais complexo. Analisemos apenas a situação inicial, sem stock e sem custo de encomenda. A função de ganhos vem

$$\boldsymbol{G(Q) = \begin{cases} VX - CQ + l(Q - X) & X \leq Q \\ VQ - CQ - p_v(X - Q) - p_f & X > Q \end{cases}}$$

cujo valor esperado é

$$\boldsymbol{E[G(Q)] = (V - l)\mu - (C - l)Q - (V + p_v - l)\int_Q^{\infty}(x - Q)\, f(x)dx - p_f\int_Q^{\infty} f(x)dx} \tag{3.74}$$

Para obter o máximo de (3.74), faça-se

$$\boldsymbol{\frac{dE[G(Q)]}{dQ} = -(C - l) + (V + p_v - l)H(Q) + p_f f(Q) = 0}$$

Isto é,

$$\boldsymbol{H(Q^*) + \frac{p_f}{V+p_v-l} f(Q^*) = \frac{C-l}{V+p_v-l}} \tag{3.75}$$

Nota 1. Quando $\boldsymbol{p_f = 0}$, obtém-se (3.67), como se esperava.

Nota 2. De modo a simplificar os cálculos, se $\boldsymbol{p_f}$ é pequeno comparado com $(\boldsymbol{V + p_v - l})$**,** junta-se o seu valor a $\boldsymbol{p_v}$ e considera-se que os custos de ruptura são proporcionais e aplica-se (3.67).

Exemplo 22. Considerem-se novamente os dados do exemplo 20, mas em que existe adicionalmente um custo fixo de ruptura de 5 000 \$. Relembremos os parâmetros do modelo considerados no exemplo 20: $\boldsymbol{\mu = 3\,000}$; $\boldsymbol{\sigma = 300}$; $\boldsymbol{V = 70}$; $\boldsymbol{C = 50}$; $\boldsymbol{l = 15}$; $\boldsymbol{p_v = 20.}$

Utilizando o Excel para obter a raiz da equação (3.75),

$$\boldsymbol{H(Q^*) + \frac{p_f}{V + p_v - l} f(Q^*) = \frac{C - l}{V + p_v - l} = H(Q^*) + \frac{5\,000}{75} f(Q^*) = \frac{35}{75}}$$

chega-se à solução aproximada $\boldsymbol{Q^* \approx 3\,090}$ quartos. O custo esperado é **161 063 \$:**

$$\boldsymbol{E[CT(Q^*)] = l\mu + (C - l)Q^* - (p_v - l)\int_{Q^*}^{\infty}(x - Q^*)\, f(x)dx - p_f \int_{Q^*}^{\infty} f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{E[CT(3\,090)] = 45\,000 + 35 * 3\,090 + 75 \int_{3\,090}^{\infty} (x - 3\,090)\, f(x)dx + 5\,000 \int_{3\,090}^{\infty} f(x)dx \approx 161\,063}$$

pois

$$\boldsymbol{\int_{3\,090}^{\infty} (x - 3\,090)\, f(x)dx = 300NL(0,3) = 300 * 0,2668 = 80,04}$$

$$\boldsymbol{H(3\,090) = \int_{3\,090}^{\infty} f(x)dx = 0,382}$$

15. 6 Modelo Com Produtos Sujeitos a Uma Restrição

Existe uma classe de problemas de período único envolvendo vários produtos sujeitos a alguma restrição, nomeadamente de espaço no armazém ou uma restrição financeira ao montante a encomendar em valor. A encomenda é conjunta, de todos os produtos, mas, excepto na restrição referida, eles são independentes, nomeadamente no comportamento da procura, dando origem a variáveis aleatórias independentes. Vejamos, para melhor interpretar o problema, o caso em que a restrição se refere ao montante total a investir em stock, dado por $\boldsymbol{B}$, mas que é facilmente generalizável a outro tipo de restrições.

Mantendo as designações anteriores, generalizemos o modelo apresentado em 15.1 para $\boldsymbol{n}$ produtos. Considerando que os custos de ruptura são proporcionais, a função de ganhos para o produto $\boldsymbol{i}$, com $\boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, n}$, vem

$$\boldsymbol{G_i(Q_i) = \begin{cases} V_i X_i - C_i Q_i + l_i(Q_i - X_i) & X_i \leq Q_i \\ V_i Q_i - C_i Q_i - p_{vi}(X_i - Q_i) & X_i > Q_i \end{cases}}$$

Pretende encontrar-se $\boldsymbol{Q_1, Q_2, \ldots, Q_n}$, sujeitos á restrição referida, não devendo ser ultrapassado o montante disponível, $\boldsymbol{B}$, de modo a maximizar o ganho total esperado no período. Suponha-se que as variáveis são contínuas, ou que os valores envolvidos são suficientemente grandes para que estas possam ser, sem cometer erros significativos, tratadas como tal. Partindo de (3.66), e fazendo $\boldsymbol{p_i = V_i + p_{vi}}$, tem-se:

$$\boldsymbol{Max\ E[G(Q_1, \ldots, Q_n)] = \sum_{i=1}^{n} E[\,G_i(Q_i)] = \sum_{i=1}^{n} \left[(V_i - l_i)\mu_i - (C_i - l_i)Q_i - (p_i - l_i)\int_{Q_i}^{\infty}(x - Q_i)f_i(x)dx\right]} \qquad (3.76)$$

sujeito à restrição orçamental

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} C_i\, Q_i = C_1 Q_1 + \cdots + C_n Q_n \leq B} \qquad (3.77)$$

O óptimo livre, para cada produto, é dado pela relação (3.67). Supondo que o óptimo livre não satisfaz a restrição, para resolver o problema constrói-se a Lagrangeana

$$L(\boldsymbol{Q_1}, \dots, \boldsymbol{Q_n}; \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} \left[(\boldsymbol{V_i} - \boldsymbol{l_i})\boldsymbol{\mu_i} - (\boldsymbol{C_i} - \boldsymbol{l_i})\boldsymbol{Q_i} - (\boldsymbol{p_i} - \boldsymbol{l_i}) \int_{\boldsymbol{Q_i}}^{\infty} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{Q_i}) \boldsymbol{f_i}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{dx} \right] + \boldsymbol{\lambda}\left(\boldsymbol{B} - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{C_i Q_i}\right) \qquad (3.78)$$

A solução óptima obtém-se resolvendo o sistema de estacionariedade

$$\frac{\partial L(.)}{\partial \boldsymbol{Q_i}} = -(\boldsymbol{C_i} - \boldsymbol{l_i}) + (\boldsymbol{p_i} - \boldsymbol{l_i})\boldsymbol{H_i}(\boldsymbol{Q_i}) - \boldsymbol{\lambda C_i} = \boldsymbol{0} \quad \text{e} \quad \frac{\partial L(.)}{\partial \lambda} = \boldsymbol{B} - \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v_i Q_i} = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{n}$$

vindo, finalmente,

$$\boldsymbol{H_i}(\boldsymbol{Q_i}) = \frac{\boldsymbol{C_i} - \boldsymbol{l_i} + \boldsymbol{\lambda C_i}}{\boldsymbol{p_i} - \boldsymbol{l_i}} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{F_i}(\boldsymbol{Q_i}) = \frac{\boldsymbol{p_i} - \boldsymbol{C_i}(\boldsymbol{1} + \boldsymbol{\lambda})}{\boldsymbol{p_i} - \boldsymbol{l_i}} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{C_i Q_i} = \boldsymbol{B} \qquad (3.79)$$

em que $\boldsymbol{p_i} = \boldsymbol{V_i} + \boldsymbol{p_{vi}}$ e $\boldsymbol{H_i}(\boldsymbol{Q_i})$ é a probabilidade de ruptura do produto $\boldsymbol{i}$.

Note-se que com esta definição da Lagrangeana, $\boldsymbol{\lambda}$ é não negativo, atingindo o valor nulo se a restrição não estiver saturada.

Uma forma de resolução consiste em escolher escolher um valor para $\boldsymbol{\lambda}$ e calcular os $\boldsymbol{Q_i}$ a partir de (3.79), seguindo-se o cálculo de $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v_i Q_i} = \overline{\boldsymbol{B}}$.

Se $\overline{\boldsymbol{B}} > \boldsymbol{B}$, aumenta-se o valor de $\boldsymbol{\lambda}$ e diminui-se no caso de $\overline{\boldsymbol{B}} < \boldsymbol{B}$, e assim sucessivamente até obter um valor para $\overline{\boldsymbol{B}}$ tão próximo de $\boldsymbol{B}$ quanto se pretenda. Uma alternativa consiste em utilizar um software adequado.

O valor óptimo para $\boldsymbol{\lambda}$, designado por $\boldsymbol{\lambda}^*$, representa o preço sombra, ou valor económico, do recurso em causa e pode ser interpretado, neste caso, como o custo marginal do capital disponível, sendo o ganho esperado adicional decorrente de mais uma unidade de capital para investir no stock, tal como já tínhamos visto nos modelos determinísticos com restrições.

Exemplo. 23 Um lojista de bairro decide encomendar três produtos típicos da quadra natalícia para vender na véspera de Natal: bolo-rei, bolo-rainha e filhoses. Cada bolo-rei é comprado por 10 euros e vendido por 25 euros, o bolo-rainha é comparado por 12 euros e vendido por 24 euros, cada caixa de filhoses custa 8 euros e é vendida por 15 euros. Se o bolo-rei sobra pode ser vendido no dia a seguir ao Natal por 8 euros, o bolo-rainha por 10 euros e a caixa de filhoses por 5 euros. A procura de bolo-rei é uma variável aleatória normal de média 100 e desvio padrão 20, a procura de bolo-rainha é igualmente uma normal de média 80 e desvio padrão 25, enquanto a procura de filhoses é uma uniforme entre 50 e 80 caixas. O orçamento do lojista é de 2 500 euros para estas compras.

Se calcularmos o óptimo livre, verificamos que

$$\boldsymbol{F_1(Q_1) = \frac{25-10}{25-8} = 0,8824 = \Phi\left(\frac{Q_1-100}{20}\right);} \quad \boldsymbol{F_2(Q_2) = \frac{24-12}{24-10} = 0,8571 = \Phi\left(\frac{Q_2-80}{25}\right);} \quad \boldsymbol{F_3(Q_3) = \frac{15-8}{15-5} = 0,7 = \frac{Q_3-50}{30}}$$

$$\boldsymbol{Q_1 \approx 124;\ Q_2 \approx 107;\ Q_3 \approx 71;\ 10 * 124 + 12 * 107 + 8 * 71 = 3\,086 > 2\,500\text{ €}}$$

Como o óptimo livre não satisfaz a restrição, calcula-se o óptimo condicionado. De acordo com (3,78), tem-se:

$$\boldsymbol{F_1(Q_1) = \frac{25-10*(1+\lambda)}{25-8};\ F_2(Q_2) = \frac{24-12*(1+\lambda)}{24-10};\ F_3(Q_3) = \frac{15-8*(1+\lambda)}{15-5};\ \ 10 * Q_1 + 12 * Q_2 + 8 * Q_3 = 2\,500}$$

A resolução iterativa, partindo de $\boldsymbol{\lambda = 0,4}$, permitiu obter rapidamente a solução óptima:

$$\boldsymbol{Q_1^* = 107;\ Q_2^* = 79; Q_3^* = 60; \lambda^* = 0,4321}$$

O custo total é 2 498 euros, valor ligeiramente diferente devido aos arredondamentos para números inteiros, dentro do limite da restrição. Um euro adicional de capital permite melhorar o ganho esperado em 0,4321 euros. As probabilidades aproximadas de ruptura para os três produtos são, respectivamente, 36%, 52% e 67%.

O ganho esperado é para os três produtos o seguinte:

- $\boldsymbol{E[G_1(Q_1)] = (25-8)*100-(10-8)*107-(25-8)*20*NL(0,35) = 1\,402}$
- $\boldsymbol{E[G_2(Q_2)] = (24-10)*80-(12-10)*79-(24-10)*25*NL(-0,04) = 815}$
- $\boldsymbol{E[G_3(Q_3)] = (15-5)*65-(8-5)*60-(15-5)*3,75 = 433}$

Sendo $\boldsymbol{NL(0,35) = 0,2481}$ $\boldsymbol{NL(-0,04) = NL(0,04)-(-0,04) = 0,3793+0,04 = 0,4193}$

e $\boldsymbol{\int_{60}^{80}(x-60)\frac{1}{30}dx = 3,75}$

Exemplo 24. Nesta classe de problemas, um caso típico é o designado por *Problema da Autonomia (*em inglês conhecido por *Flyaway-Kit Problem*), e que consiste em equipar um submarino, e o armamento que transporta, com peças sobressalentes, sabendo que o espaço é limitado. Neste tipo de exemplo assume em geral maior relevância a existência de ruptura de stock, pelo que o objectivo consiste em minimizar o custo total provável de ruptura, supondo, obviamente, que é conhecido ou imputável um custo de ruptura por cada peça que é solicitada e não está disponível em cada campanha do submarino, para além da distribuição de probabilidade da procura de cada peça. Faremos a apresentação com este exemplo com suporte.

Considerem-se $\boldsymbol{n}$ diferentes tipos de peças e seja $\boldsymbol{b_i}$ o volume (espaço) ocupado pela peça $\boldsymbol{i}$, com $\boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, n}$. Seja $\boldsymbol{B}$ o volume (espaço) disponível para peças sobressalentes. O custo unitário de ruptura do produto $\boldsymbol{i}$ designa-se por $\boldsymbol{p_i}$. Mantendo as designações anteriores, pretende obter-se $\boldsymbol{Q_1}$, $\boldsymbol{Q_2, \ldots, Q_n}$, não negativos, de modo a minimizar o custo provável de ruptura, dado por

$$\boldsymbol{E[CT(Q_1, \ldots, Q_n)] = p_1 \sum_{x=Q_1}^{\infty}(x - Q_1)f_1(x) + \cdots + p_n \sum_{x=Q_n}^{\infty}(x - Q_n)f_n(x)} \qquad (3.80)$$

Sujeito à restrição

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} b_i\, Q_i = b_1 Q_1 + \cdots + b_n Q_n \leq B} \qquad (3.81)$$

Os valores obtidos para os $\boldsymbol{Q_i}$ devem ser arredondados para valores inteiros, o que em si não deveria constituir um problema no caso de se estar perante valores grandes. Se for o caso, a passagem ao caso contínuo permite simplificar as conclusões. Como em geral o óptimo livre não satisfaz a restrição, constrói-se a Lagrangeana

$$\boldsymbol{L(Q_1, \ldots, Q_n; \lambda) = \sum_{i=1}^{n} p_i \int_{Q_i}^{\infty}(x - Q_i)f_i(x)dx] + \lambda(B - \sum_{i=1}^{n} b_i\, Q_i)} \qquad (3.82)$$

A solução óptima obtém-se resolvendo o sistema de estacionariedade

$$\boldsymbol{\frac{\partial L(.)}{\partial Q_i} = -p_i H_i(Q_i) - \lambda b_i = 0} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\frac{\partial L(.)}{\partial \lambda} = B - \sum_{i=1}^{n} b_i Q_i = 0} \quad \boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, n} \qquad (3.83)$$

vindo, finalmente ($\boldsymbol{\lambda}$ é negativo)

$$\boldsymbol{H_i(Q_i) = -\frac{\lambda b_i}{p_i}} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{F_i(Q_i) = 1 + \frac{\lambda b_i}{p_i}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} b_i Q_i = B} \qquad (3.84)$$

Uma forma de resolver consiste em escolher um valor (negativo) para $\boldsymbol{\lambda}$ e calcular os diversos $\boldsymbol{Q_i}$, através de (3.83) até os dois membros da restrição estarem próximos. Assim, após o cálculo dos $\boldsymbol{Q_i}$, calcula-se $\overline{\boldsymbol{B}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{b_i Q_i}$.

Se $\overline{\boldsymbol{B}} > \boldsymbol{B}$, toma-se um valor para $\boldsymbol{\lambda}$ inferior (mais negativo) ao anterior; se $\overline{\boldsymbol{B}} < \boldsymbol{B}$, procede-se ao contrário, e assim sucessivamente até se a um valor para $\overline{\boldsymbol{B}}$ tão próximo de $\boldsymbol{B}$ quanto se deseje.

O procedimento anterior é adequado quando os valores dos $\boldsymbol{Q_i}$ são elevados, em que a aproximação ao contínuo e o arredondamento dos valores não traz grande desvios. No entanto, tal não acontece quando os valores em causa são pequenos, muitas vezes próximos de zero. Para estes casos, H. Hadley e T. Whitin sugerem um algoritmo de cálculo por aproximações sucessivas, que consiste em notar que se o número de unidades do produto $\boldsymbol{i}$ em stock passa de $\boldsymbol{Q_i - 1}$ a $\boldsymbol{Q_i}$, a redução no custo provável é de $\boldsymbol{p_i H_i(Q_i)}$, sendo $\boldsymbol{H_i(Q_i) = P(X_i \geq Q_i)}$ a função de distribuição complementar, como já se disse, e o espaço suplementar necessário a esta unidade em stock é $\boldsymbol{b_i}$. Deste modo, a redução no custo provável devido a esta unidade adicional em stock por unidade de volume (espaço) é $\boldsymbol{p_i H_i(Q_i)/b_i}$. O método consiste em seguida ir acrescentando unidades de produto que possibilitem a maior redução nos custos prováveis por unidade de volume suplementar. Esquematicamente, tem-se:

1. Calcular

$$\boldsymbol{\max_i \left\{ \frac{p_i}{b_i} H_i(1) \right\}}$$

2. Se o máximo é atingido para $\boldsymbol{i = j}$, toma-se $\boldsymbol{Q_j = 1}$ e calcula-se seguidamente

$$\boldsymbol{\max \left\{ \max_{i \neq j} \left[\frac{p_i}{b_i} H_i(1) \right], \quad \frac{p_j}{b_j} H_j(2) \right\}}$$

A unidade suplementar seguinte corresponde ao índice que torna a expressão anterior máxima.

3. Repetir o processo até ao momento em que qualquer adição de uma unidade suplementar é incompatível com a restrição de espaço.

Nota. Existem situações com mais do que uma restrição, uma de volume, outra de peso e, eventualmente, outra orçamental. Embora a verificação de alguma delas possa arrastar a verificação das outras, em geral estas situações são muito mais complexas, sendo a via mais adequada a utilização de técnicas de programação dinâmica.

Exemplo 25. Considere-se um submarino que deve ser equipado com peças sobressalentes, aqui por simplicidade apenas de quatro tipos diferentes. Para cada tipo de peça, a procura durante uma viagem (campanha) do submarino é uma variável aleatória de *poisson* de média, respectivamente, 2, 3, 1,5 e 0,5. O espaço ocupado por cada peça é, respectivamente, 4, 3, 2 e 6 unidades de volume. Se alguma destas peças for necessária e não estiver disponível, obriga a uma paragem e a uma encomenda por avião, sendo os custos estimados em 1 500, 1 000, 5 000 e 10 000 u.m., respectivamente. O espaço disponível para estes quatro produtos é de 20 unidades de volume.

$\boldsymbol{p_1 = 1\,500;\ p_2 = 1\,000;\ p_3 = 5\,000;\ p_4 = 10\,000;\ b_1 = 4;\ b_2 = 3;\ b_3 = 2;\ b_4 = 6;}$

$\boldsymbol{H_1(1) = 0,8647;\ H_2(1) = 0,9502;\ H_3(1) = 0,7767;\ H_4(1)0 =,3935}$

1. Calcular

$$\boldsymbol{max\left\{\frac{1\,500}{4} * 0,8647;\ \frac{1\,000}{3} * 0,9502; \frac{5\,000}{2} * 0,7767; \frac{10\,000}{6} * 0,3935\right\} = \frac{5\,000}{2} * 0,7767 = 1\,942,2}$$

2. Como o máximo é atingido para $\boldsymbol{i = 3}$**,** toma-se $\boldsymbol{Q_3 = 1}$, que ocupa apenas 2 unidades de volume, aquém das 20 disponíveis. Após determinar $\boldsymbol{H_3(2) = 0,4422}$, calcula-se seguidamente

$$\boldsymbol{max\left\{\frac{1\,500}{4} * 0,8647;\ \frac{1\,000}{3} * 0,9502;\ \frac{5\,000}{2} * 0,4422;\ \frac{10\,000}{6} * 0,3935\right\} = \frac{5\,000}{2} * 0,4422 = 1\,105,4}$$

3. Como o máximo é atingido novamente para $\boldsymbol{i=3,}$ toma-se $\boldsymbol{Q_3=2}$, que ocupam apenas 4 unidades de volume Após determinar $\boldsymbol{H_3(3)=0,1912}$, calcula-se seguidamente

$$\boldsymbol{max\left\{\frac{1\,500}{4}*0,8647;\ \frac{1\,000}{3}*0,9502;\ \frac{5\,000}{2}*0,1912;\ \frac{10\,000}{6}*0,3935;\right\}=\frac{10\,000}{6}*0,3935=0,6558}$$

4. Como o máximo é atingido para $\boldsymbol{i=4,}$ toma-se $\boldsymbol{Q_4=1}$. O espaço ocupado é $\boldsymbol{\bar{B}=}$ **2∗2+6∗1=10** $\boldsymbol{<20}$. Após determinar $\boldsymbol{H_4(2)=0,0902}$, calcula-se seguidamente

$$\boldsymbol{max\left\{\frac{1\,500}{4}*0,8647;\ \frac{1\,000}{3}*0,9502;;\ \frac{5\,000}{2}*0,1912;\ \frac{10\,000}{6}*0,0902\right\}=\frac{5\,000}{2}*0,1912=477,9}$$

5. Como o máximo é atingido para $\boldsymbol{i=3,}$ toma-se $\boldsymbol{Q_3=3}$. O espaço ocupado é $\boldsymbol{\bar{B}=}$ **2∗3+6∗1=12** $\boldsymbol{<20}$. Após determinar $\boldsymbol{H_3(4)=0,0902}$, calcula-se seguidamente

$$\boldsymbol{max\left\{\frac{1\,500}{4}*0,8647;\ \frac{1\,000}{3}*0,9502;;;\ \frac{5\,000}{2}*0,0656;\ \frac{10\,000}{6}*0,0902\right\}=\frac{1\,500}{4}*0,8647=0,324,2}$$

6. Como o máximo é atingido para $\boldsymbol{i=1,}$ toma-se $\boldsymbol{Q_1=1}$. O espaço ocupado é $\boldsymbol{\bar{B}=}$ **2∗3+6∗1+4∗1=16** $\boldsymbol{<20}$. Após determinar $\boldsymbol{H_1(2)=0,594}$, calcula-se seguidamente

$$\boldsymbol{max\left\{\frac{1\,500}{4}*0,594;\ \frac{1\,000}{3}*0,9502;\ \frac{5\,000}{2}*0,0656;\ \frac{10\,000}{6}*0,0902\right\}=\frac{1\,000}{3}*0,9502=316,7}$$

7. Como o máximo é atingido para $\boldsymbol{i=2,}$ toma-se $\boldsymbol{Q_2=1}$. O espaço ocupado é $\overline{\boldsymbol{B}}=$ **2∗3+6∗1+4∗1+3∗1=19** $<\mathbf{20}$. Como qualquer produto ocupa um espaço superior a uma unidade, não é possível incluir mais produtos. As peças a incluir são:

$\boldsymbol{Q_1^*=1}$; $\boldsymbol{Q_2^*=1}$; $\boldsymbol{Q_3^*=3}$; $\boldsymbol{Q_4^*=1}$, sendo o espaço ocupado $\overline{\boldsymbol{B}}=\mathbf{19}$ unidades de volume, aquém das 20 disponíveis.

O custo esperado de ruptura é

$\boldsymbol{E[CT(1,1,3,1)]=1\,500\sum_{x=1}^{\infty}(x-1)f(x/2)+1\,000\sum_{x=1}^{\infty}(x-1)f(x/3)+5\,000\sum_{x=3}^{\infty}(x-3)f(x/1,5)+}$
$\boldsymbol{10\,000\sum_{x=1}^{\infty}(x-1)f(x/0,5)=1\,500*1,135+1\,000*2,05+5\,000*0,107+10\,000*0,090=1\,703,0+}$
$\boldsymbol{2\,049,8+532,5+897,0=5\,182,3}$ u.m.

As probabilidades de ruptura para os quatro produtos são as seguintes:

$\boldsymbol{P(X_1>1)=59,4}\%$; $\boldsymbol{P(X_2>1)=80,1}\%$; $\boldsymbol{P(X_3>3)=6,6}\%$; $\boldsymbol{P(X_4>1)=9,0}\%$

Nota. Para não tornar o exercício muito fastidioso, considerou-se um número pequeno de artigos e um espaço disponível também muito reduzido, para não ter um número de iterações muito grande. Com números maiores e a representar situações mais aderentes à realidade, o grau de dificuldade conceptual é o mesmo, só a sua resolução prática seria fastidiosa, devendo para isso utilizar-se meios de cálculo automático.

16. Modelos Aleatórios de Revisão Contínua ou de Ponto de Encomenda

Contrariamente aos modelos do ponto anterior, estes modelos são de natureza sequencial. São, portanto, modelos dinâmicos, ao contrário dos anteriores que são estáticos. Tal como nos modelos determinísticos abordados, as encomendas podem ser maiores ou menores, com isso implicando menor ou maior número de encomendas no período de planeamento, não havendo em geral o risco de o produto "perder" qualidades e valor ao ultrapassar um período de tempo em stock. São portanto os modelos correspondentes aos modelos determinísticos, só que agora a hipótese de certeza foi abandonada, nomeadamente quanto ao conhecimento da procura ou ao prazo de reaprovisionamento, sendo conhecido o seu comportamento probabilístico, o que os qualifica como aleatórios. Neste capítulo estudamos os *Modelos de Revisão Contínua*, ou *Modelos de Ponto de Encomenda*, e no próximo os *Modelos de Revisão Periódica*, também conhecidos como *Modelos de Calendário*.

Uma das características dos modelos de ponto de encomenda é o conhecimento do estado do sistema de stocks a qualquer momento, situação que já ocorria nos modelos determinísticos estudados. No entanto, a partir do momento em que a procura é aleatória, tal pode não acontecer, a não ser que todos os movimentos (procura, passagem da encomenda, entrega) sejam registados e continuamente acompanhados, o que acontece nestes modelos. Por isso se diz, que um sistema de stocks nestas condições se chama de *informação perfeita.* Nestas condições, a encomenda é feita logo que o stock atinge determinado ponto (assume-se, como hipótese simplificadora, que as procuras ocorrem de forma individual).

Uma outra consideração, aliás também válida nos modelos de calendário, tem a ver com o caracter estacionário da procura. Consideramos que a procura é aleatória, mas os parâmetros (média e variância, por exemplo) mantêm-se inalterados ao longo do horizonte de gestão, para os mesmos intervalos de tempo. Portanto, a taxa média de procura mantém-se e mantemos a designação já utilizada nos modelos determinísticos.

Uma terceira consideração diz respeito ao estado do sistema no momento da entrega da encomenda. Nos modelos determinísticos, com taxa de procura constante, o stock era nulo no momento da entrega de uma encomenda, pois essa era a situação que minimizava os custos e esse momento era facilmente previsível, o que agora já não pode ser garantido.

Com efeito, a partir do momento em que a procura é aleatória, o stock no momento da chegada da encomenda é ele próprio uma varável aleatória, não sendo então possível conhecer antecipadamente o seu valor com exactidão. Define-se como *Stock de Segurança* o valor esperado, ou provável, do nível do stock líquido no momento da chegada da encomenda no caso de vendas diferidas e como o valor esperado do stock disponível no mesmo momento no caso de vendas perdidas. O stock de segurança será designado por $\boldsymbol{s}$, podendo ser positivo, nulo ou negativo no caso de vendas diferidas, mas apenas positivo ou nulo no caso de vendas perdidas. Enquanto no caso dos modelos determinísticos, o "stock de segurança" é nulo, no caso de procura aleatória é frequentemente necessário ter um stock de segurança positivo, caso contrário o sistema entraria frequentemente em ruptura. Claro que o stock de segurança é tanto mais elevado quanto mais elevados forem os custos de ruptura e maior for a dispersão da procura (aleatória).

Neste capítulo voltamos a determinar a política de stocks para um caso de um único armazém (instalação única), e o objectivo consiste em determinar a *Quantidade a Encomendar*, $\boldsymbol{Q}$, cada vez que o stock atinge determinado ponto, chamado *Ponto de Encomenda,* e designado por $\boldsymbol{r}$ **(***reorder point*, em inglês**);** daí a designação de modelos de Ponto de Encomenda, ou modelo $\langle \boldsymbol{Q};\ \boldsymbol{r} \rangle$.

A possibilidade de passar uma encomenda logo que se atinge o ponto de encomenda implica, no caso de procura de natureza inteira, que o número de unidades procuradas de cada vez seja uma unidade, o que não acontece se esse número for uma variável aleatória. Se tal acontecer, podendo procurar-se quantidades diferentes, o stock pode "saltar" o ponto de encomenda, situando-se na altura da encomenda num valor inferior a ele, sem que tal possa ser evitado. Nesta circunstâncias pode não ser adequado fazer encomendas de montante fixo, recomendando-se uma variante na política $\langle \boldsymbol{Q};\ \boldsymbol{r} \rangle$ de modo a ter em conta a diferença entre o ponto de encomenda e o stock de facto existente no momento da encomenda. Seja então $\boldsymbol{r}$ o ponto de encomenda e $\boldsymbol{r_0}$ o stock existente no momento da encomenda, com $\boldsymbol{r_0} < \boldsymbol{r}$**,** supondo que o stock "saltou" por cima do ponto de encomenda. De acordo com esta variante, a quantidade a encomendar será $\boldsymbol{Q} + (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0})$**.** Isto é, fazendo $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{r}$*,* com a encomenda pretende levar-se o stock até $\boldsymbol{R}$*,* encomendando-se $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r_0}$**.** Esta política é por vezes designada por política $\langle \boldsymbol{R};\ \boldsymbol{r} \rangle$**.**

O tratamento a seguir apresentado é um tratamento heurístico, pois os modelos utilizados são aproximações aos modelos exactos, sendo aqueles bastante mais simples e com boa aderência à realidade da gestão.

16. 1 Modelo $\langle \boldsymbol{Q};\ \boldsymbol{r} \rangle$ com Vendas Diferidas e Custos de Ruptura Variáveis

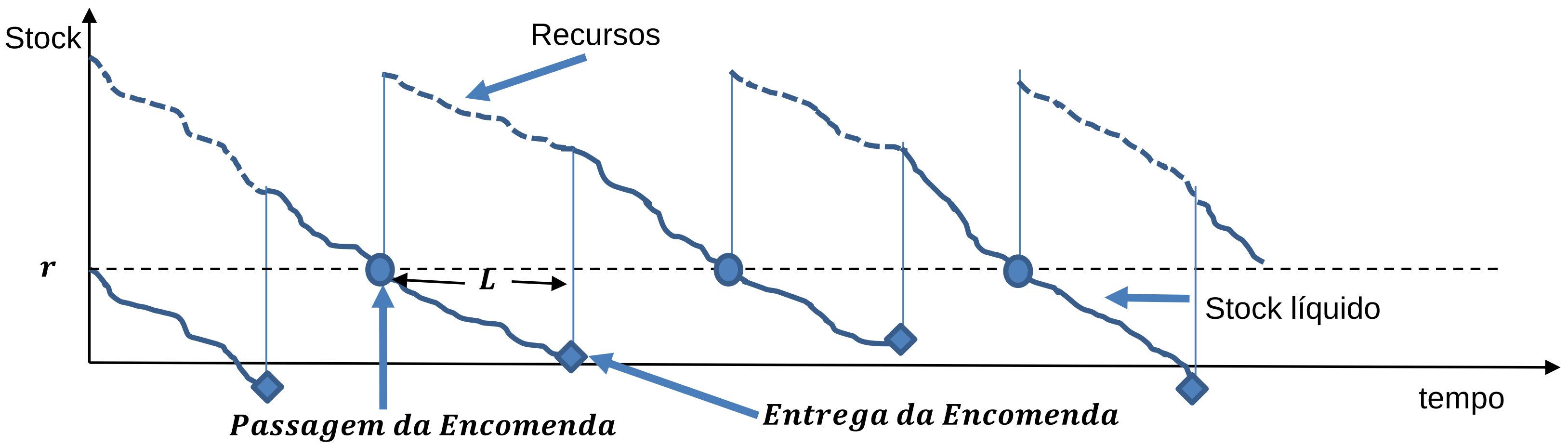
Como dissemos, estes modelos são modelos aproximados, baseados em várias hipóteses, cujas principais explicitaremos de seguida. São hipóteses que tornam estes modelos de muito mais fácil aplicação prática, sem lhes retirar importância, visto manterem, em geral, uma grande aderência a inúmeras situações. Têm, por outro lado, a vantagem de uma mais fácil compreensão teórica do essencial do funcionamento sistema de stocks. Como se disse, o sistema tem apenas uma instalação, e está em causa a gestão de um único produto. Caso existam outros produtos, supões que são independentes.
Adicionalmente consideram-se as seguintes hipóteses:

1. O custo unitário do produto é constante e independente de $\boldsymbol{Q}$;
2. O custo de ruptura, por venda diferida, é assumido ser independente do tempo em ruptura, visto este em geral ser muito pequeno. Genericamente designa-se por $\boldsymbol{p}$**,** podendo ser um custo por unidade diferida ou ser um custo fixo independente do número de unidades diferidas. Quando existirem os dois custos, o primeiro é proporcional ao número de unidades em ruptura e terá como custo unitário $\boldsymbol{p_v}$ (custo variável) e o segundo é fixo e independente do número de unidades em ruptura e é designado $\boldsymbol{p_f}$**.** Note-se que embora as designações sejam idênticas às do modelos determinísticos, agora são custos variáveis e fixos não em função do tempo mas do número de unidades em ruptura;
3. Não existe mais do que uma encomenda por receber;
4. O custo do sistema de informação necessário ao funcionamento do sistema é independente da política para $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{r}$;
5. O Ponto de Encomenda**,** $\boldsymbol{r}$*,* é positivo, o que significa que não existem procuras diferidas no momento da encomenda.

A hipótese 2 é frequentemente verificada, pois muitos sistemas reais, em geral, registam pouco tempo de ruptura, sendo muitas vezes mais crítico o número de rupturas ou o facto de haver ruptura, independentemente do seu tamanho, do que o tempo em ruptura. Mais à frente serão analisadas as três hipóteses, apenas um custo de ruptura proporcional, ou variável com o número de unidades em ruptura, apenas um custo fixo, independentemente do número de unidades em falta no ciclo e a existência conjunta dos dois tipos de custo de ruptura.

A hipótese 3 também tem boa aderência, sobretudo quando o prazo de reaprovisionamento é constante ou tem pouca variabilidade, o que também acontece frequentemente. Esta hipótese tem a vantagem de fazer com que o total dos recursos do sistema (nível do stock disponível aumentado da encomenda e diminuído das procuras diferidas) seja igual ao stock líquido (stock disponível menos procuras diferidas). Também a hipótese 5 é comumente verificada. Neste caso, no momento do ponto de encomenda os recursos são iguais ao stock disponível.

O comportamento do stock disponível e dos recursos do sistema pode ser ilustrado através da figura seguinte.



Como se verifica, o sistema descreve um ciclo entre duas encomendas consecutivas, seja entre passagens seja entre entregas. Mas, contrariamente aos modelos determinísticos, não se pode dizer que o sistema passa exactamente pelos mesmos estados em cada ciclo, isto devido ao comportamento aleatório da procura. O próprio comprimento do ciclo é uma variável aleatória, devido á aleatoriedade da procura.

Passa-se seguidamente ao estabelecimento do modelo, a partir do qual se determinam o $\boldsymbol{Q}$ e o $\boldsymbol{r}$ que minimizam o custo total médio anual esperado.

Devido á hipótese 1, excluímos do custo médio anual o custo médio de aquisição, $\boldsymbol{CD}$**,** visto ser uma constante, em que neste contexto $\boldsymbol{D}$ é o valor esperado da procura anual, mas que mantemos a mesma designação utilizada nos modelos determinísticos**.** Por enquanto supor-se-á que o prazo de reaprovisionamento é uma constante, designada por $\boldsymbol{L}$**.**

Custos Anuais de Encomenda

$\boldsymbol{A\frac{D}{Q}}$ A expressão é a mesma dos modelos determinísticos, com a diferença que $\boldsymbol{D}$ é o valor esperado da procura anual

Custos Anuais de Posse do Stock

O stock mínimo regista-se imediatamente antes da entrega da encomenda e é, neste caso, uma variável aleatória, função da procura que ocorre no prazo de reaprovisionamento e do ponto de encomenda. Designe-se por $\boldsymbol{X_L}$**,** ou simplesmente por $\boldsymbol{X}$**,** a procura durante o prazo de reaprovisionamento, e por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ a respectiva função de densidade. Designe-se por $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{r})$ o stock imediatamente antes da entrega da encomenda, isto é, o stock mínimo. Tem-se então $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{X}$, cujo valor esperado é $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{r})] = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{s}$, em que $\boldsymbol{\mu}$ é o valor esperado da procura durante o prazo de reaprovisionamento, e que representa o *Stock de Segurança*.

Por outro lado, o stock máximo é também uma variável aleatória, dada pelo stock mínimo acrescido da quantidade entregue $\boldsymbol{Q}$**,** isto é**,** $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Q}$**,** cujo valor esperado é $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{Q}$**.**

Como a taxa de procura é constante, o stock médio esperado é dado pela média do stock mínimo esperado com o stock máximo esperado, vindo $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\mu} + \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{2}}$**.** Este é o stock médio do ciclo e também o stock médio anual, pois em cada ciclo o stock médio esperado é o mesmo. Os custos anuais de posse de stock são então:

$$\boldsymbol{IC}[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\mu} + \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{2}}] \qquad (3.85)$$

Custos de Ruptura de Stocks (Venda Diferida)

Também o número de unidades diferidas é uma variável aleatória, função da procura no prazo de reaprovisionamento e do ponto de encomenda. Designe-se por $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{r})$ essa variável aleatória. Então:

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{X} < \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{X} - \boldsymbol{r} & \boldsymbol{X} \geq \boldsymbol{r} \end{cases}$$

sendo o seu valor esperado, no caso contínuo, dado por

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{r})] = \int_r^{\infty} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \int_r^{\infty} \boldsymbol{x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} - \boldsymbol{r}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \int_r^{\infty} \boldsymbol{x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} - \boldsymbol{r}[\mathbf{1}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})] \tag{3.86}$$

Como existe apenas um custo proporcional, considera-se $\boldsymbol{p_v} = \boldsymbol{p}$, O custo esperado anual será então

$$\boldsymbol{p}\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{Q}}\left[\int_r^{\infty} \boldsymbol{x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} - \boldsymbol{r}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\right] \tag{3.87}$$

em que $\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{Q}}$ representa o número médio de ciclos por ano e $\boldsymbol{p}$ o custo por unidade diferida.

A expressão do custo médio anual esperado vem então

$$CT(Q,r) = \boldsymbol{A}\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{IC}\left[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\mu} + \frac{\boldsymbol{Q}}{2}\right] + \boldsymbol{p}\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{Q}}\left[\int_r^{\infty} \boldsymbol{x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} - \boldsymbol{r}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\right] \tag{3.88}$$

Seguidamente determinam-se os valores para $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{r}$ que minimizam (3.88). Se estes valores verificarem as condições $\mathbf{0} < \boldsymbol{Q}^* < \infty$ e $\mathbf{0} < \boldsymbol{r}^* < \infty$, então $\boldsymbol{Q}^*$ e $\boldsymbol{r}^*$ são soluções do sistema de estacionariedade

$$\frac{\partial \boldsymbol{CT}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{Q}} = -\frac{\boldsymbol{AD}}{\boldsymbol{Q}^2} + \frac{\boldsymbol{IC}}{2} - \frac{\boldsymbol{pD}}{\boldsymbol{Q}^2}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{r})] = \mathbf{0} \tag{3.89}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{CT}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{IC} + \boldsymbol{p}\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{Q}}[-\boldsymbol{r}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{r}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})] = \mathbf{0} \tag{3.90}$$

vindo finalmente

$$\boldsymbol{Q^*} = \sqrt{\frac{2D\{A+pE[\eta(X,r)]\}}{IC}} \qquad \text{e} \qquad H(r^*) = \frac{Q^*IC}{pD} \tag{3.91}$$

Nota 1. A expressão $H(r^*) = \int_{r^*}^{\infty} f(x)dx$ é uma probabilidade, pelo que se $\frac{Q^*IC}{pD} > 1$, isto significa que o custo de ruptura é demasiado baixo (relativamente ao custo de posse de stock), o que implica uma ruptura muito elevada. Isto contradiz a hipótese do modelo que considera rupturas não muito elevadas e ponto de encomenda positivo.

Nota 2. Nem sempre é fácil a resolução de (3.91). Mais á frente apresenta-se um algoritmo que permite obter numericamente Q^* e r^*.

Nota 3. No caso da procura ter uma distribuição uniforme, a resolução de (3.91) permite obter directamente Q^* e r^*.

Com efeito, considere-se que a procura no prazo de reaprovisionamento, X, é uma variável uniforme no intervalo $[a, b]$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & outros \end{cases}$$

Para $H(r^*)$ vem

$$H(r^*) = \int_{r^*}^{b} \frac{dx}{b-a} = \frac{b-r^*}{b-a} = \frac{Q^*IC}{pD}$$

isto é,

$$\boldsymbol{r^* = b - \frac{Q^* IC}{pD}(b-a)} \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{b - r^* = \frac{Q^* IC}{pD}(b-a)}$$

Por outro lado,

$$\boldsymbol{E[\eta(X, r^*)] = \int_{r^*}^{b} (x - r^*) \frac{dx}{b-a} = \frac{(b-r^*)^2}{2(b-a)}}$$

e

$$\boldsymbol{Q^* = \sqrt{\frac{2D\{A + p\frac{(b-r^*)^2}{2(b-a)}\}}{IC}}}$$

Substituindo na expressão anterior, em $\boldsymbol{Q^*}$, $\boldsymbol{b - r^*}$ por $\boldsymbol{\frac{Q^* IC}{pD}(b-a)}$, quadrando e resolvendo em ordem a $\boldsymbol{Q^*}$, vem finalmente

$$\boldsymbol{Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{IC}} \sqrt{\frac{pD}{pD - IC(b-a)}}} \tag{3.92}$$

Ou seja, a quantidade a encomendar é o $\boldsymbol{Q}$ de Wilson majorado pelo factor $\boldsymbol{\sqrt{\frac{pD}{pD-IC(b-a)}}}$ (que é maior do que 1).

Nota 4. Também no caso da procura ser uma distribuição exponencial, a resolução de (3.91) permite obter directamente $\boldsymbol{Q^*}$ e $\boldsymbol{r^*}$. Considere-se que a procura no prazo de reaprovisionamento, $\boldsymbol{X}$, é uma variável exponencial de média $\boldsymbol{\lambda}$.

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & x \geq 0 \\ 0 & outros \end{cases}}$$

Para $\boldsymbol{H(r^*)}$ vem

$$\boldsymbol{H(r^*)=\int_{r^*}^{\infty}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}\,dx=e^{-\frac{r^*}{\lambda}}=\frac{Q^*IC}{pD}}$$

isto é,

$$\boldsymbol{r^*=-\lambda ln\frac{Q^*IC}{pD}}\quad \text{ou}\quad \boldsymbol{Q^*=\frac{pD}{IC}e^{-\frac{r^*}{\lambda}}}$$

Por outro lado,

$$\boldsymbol{E[\eta(X,r^*)]=\int_{r^*}^{\infty}(x-r^*)\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx=\lambda e^{-\frac{r^*}{\lambda}}}$$

$$\boldsymbol{Q^*=\sqrt{\frac{2D[A+p\lambda e^{-\frac{r^*}{\lambda}}]}{IC}}=\sqrt{\frac{2AD}{IC}+\frac{2pD}{IC}\lambda e^{-\frac{r^*}{\lambda}}}=\sqrt{\frac{2AD}{IC}+2\lambda Q^*}}$$

Se quadrarmos ambos os membros desta expressão e somarmos e subtrairmos $\boldsymbol{\lambda^2}$**,** vem

$$\boldsymbol{(Q^*)^2-2\lambda Q^*+\lambda^2-\lambda^2=\frac{2AD}{IC}}\qquad \text{ou}\qquad \boldsymbol{(Q^*-\lambda)^2=\lambda^2+\frac{2AD}{IC}}$$

Vindo finalmente para $\boldsymbol{Q^*}$

$$\boldsymbol{Q^*=\lambda+\sqrt{\lambda^2+\frac{2AD}{IC}}} \tag{3.93}$$

Ou seja, mais uma vez, a quantidade a encomendar é função do $\boldsymbol{Q}$ de Wilson, mas com um valor superior, exactamente por causa da "incerteza aleatória" considerada no modelo.

Nota 5. quando o prazo de reaprovisionamento é também uma variável aleatória, com distribuição conhecida, o valor esperado do stock antes da chegada da encomenda (stock mínimo) é dado pelo integral duplo

$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{L})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{L})\boldsymbol{dxdL}=\int_{0}^{\infty}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x})\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} \tag{3.94}$$

em que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{L})$ é função de densidade da procura condicionada pelo prazo de reaprovisionamento, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{L})$ é a função de densidade do prazo de reaprovisionamento e $\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x})$ é a função de densidade marginal da procura que, como se sabe, é dada por

$$\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x})=\int_{0}^{\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{L})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{L})\boldsymbol{dL}$$

e onde $\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{L})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ quando o prazo de reaprovisionamento é uma constante $\boldsymbol{L}$.

Nota 6. Seja $\boldsymbol{D}$ a variável aleatória que representa a procura anual, com média $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{D})$ (simplifica-se fazendo $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{D})=\boldsymbol{D}$), variância $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{D})$ e desvio padrão $\boldsymbol{\sigma_D}$. Seja $\boldsymbol{X_L}$, ou simplesmente $\boldsymbol{X}$, a variável aleatória que representa a procura no prazo de reaprovisionamento. Assume-se que $\boldsymbol{X}$ é contínua com função de densidade $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, média $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{\mu}$, variância $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{\sigma^2}$ e desvio padrão $\boldsymbol{\sigma}$. Se assumirmos que as procuras em diferentes pontos no tempo (por exemplo no dia, na semana, na quinzena ouno mês) são independentes, pode ser mostrado que a procura $\boldsymbol{X}$ satisfaz as seguintes relações

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{LE}(\boldsymbol{D})=\boldsymbol{LD},\qquad \boldsymbol{V}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{LV}(\boldsymbol{D})\qquad \text{e}\qquad \boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma_D}\sqrt{\boldsymbol{L}} \tag{3.95}$$

Por outro lado, assumimos que se $\boldsymbol{D}$ está normalmente distribuída, então $\boldsymbol{X}$ tem também distribuição normal.

Se, para além da procura, também o prazo de reaprovisionamento $\boldsymbol{L}$ for uma variável aleatória, com média $\boldsymbol{E(L)}$ e variância $\boldsymbol{V(L)}$**,** se o o comprimento do prazo de reaprovisionamento for independente da procura por unidade de tempo, durante este prazo, demonstra-se que

$$\boldsymbol{E(X) = E(L)E(D)} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{V(X) = E(L)V(D) + E(D)^2V(L)} \qquad (3.95a)$$

Exemplo 26. Uma empresa comercializa um produto cuja procura média anual é uma v. a. normal de média 10 000 unidades e desvio padrão 900. O custo à saída do fornecedor é de 50 \$/unidade. O frete custa 5 \$/unidade e o seguro custa 2% sobre o preço de aquisição. Ao entrar em armazém o produto tem custos de movimentação de 1 \$/unidade. Os custos de inspecção e controle têm uma componente fixa de 500 \$ e uma componente variável de 0,5 \$/unidade. O custo de cada encomenda é de 600 \$. O prazo de reaprovisionamento é de 15 dias e a taxa de posse é de 15% ao ano. Caso o produto não esteja disponível, o cliente aguarda mas existe um custo de ruptura de 66 \$/unidade.

$\boldsymbol{D = 10\,000}$ unidades; $\boldsymbol{C = 50 + 5 + 0,02 * 50 + 1 + 0,5 = 57,5}$ \$; $\boldsymbol{I = 0,15}$; $\boldsymbol{IC = 0,15 * 57,5 = 8,625}$; $\boldsymbol{p = 66}$ \$**;** $\boldsymbol{A = 500 + 600 = 1\,100}$**;** $\boldsymbol{E(X) = \mu = \frac{1}{24} * 10\,000 = 416,7}$; $\boldsymbol{\sigma = 900\sqrt{\frac{1}{24}} = 183,71}$; $\boldsymbol{X}$ é uma variável aleatória normal de média **416,7** e desvio padrão **183,71.**

Como neste caso $\boldsymbol{Q^*}$ e $\boldsymbol{r^*}$ não podem ser obtidos directamente a partir de (3.91), utiliza-se um algoritmo numérico desenvolvido por Hadley e Whitin (1963). Como os autores mostraram, o algoritmo converge e existindo solução, ela é obtida num número finito de iterações. Assim:

Passo 0. calcular $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{r}$ a partir de (3.91) considerando $\boldsymbol{E[\eta(X,r)] = 0}$, isto é, $\boldsymbol{Q}$ de Wilson e o $\boldsymbol{r}$ correspondente:

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2*10\,000*1\,100}{8{,}625}} = 1\,597,1; \qquad H(r_0) = \frac{1\,597{,}1*8{,}625}{66*10\,000} = 0,0209; \qquad \Phi\left(\frac{r_0-416{,}7}{183{,}71}\right) = 0,9791;\ r_0 = 790,7$$

Passo 1. considerando o r anteriormente obtido, calcular $E[\eta(X,r)]$, e, a partir deste, novos Q e r:

Como a distribuição é normal (ver (3.70))

$$E[\eta(X,r_0)] = \int_{r_0}^{\infty}(x-r_0)f(x)dx = \sigma\left\{\phi\left(\frac{r_0-\mu}{\sigma}\right) - \left(\frac{r_0-\mu}{\sigma}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{r_0-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\} = \sigma NL\left(\frac{r_0-\mu}{\sigma}\right)$$

$$E[\eta(X,790,7\,)] = 183,71 * NL\left(\frac{790,7-416,7}{183,71}\right) = 183,71 * NL(2,04) = 183,71 * 0,007623 = 1,4$$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2*10\,000*(1\,100+66*1{,}4)}{8{,}625}} = 1\,663; \qquad H(r_1) = \frac{1\,663*8{,}625}{66*10\,000} = 0,022; \qquad \Phi\left(\frac{r_1-416{,}7}{183{,}71}\right) = 0,978;\ r_1 = 787,6$$

Passo 2. Repetir o passo 1 :

$$E[\eta(X,787,6\,)] = 183,71 * NL\left(\frac{787,6-416,7}{183,71}\right) = 183,71 * NL(2,02) = 183,71 * 0,008046 = 1,5$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2*10\,000*(1\,100+66*1{,}5)}{8{,}625}} = 1\,666,4; \qquad H(r_2) = \frac{1\,666{,}4*8{,}625}{66*10\,000} = 0,022; \quad r_2 = 787,5$$

Como r_2 é praticamente igual a r_1, todos os valores daqui para a frente serão praticamente iguais aos acabados de obter, que poderão ser considerados como a solução óptima. Como se ilustra, o algoritmo converge muito rapidamente e permite chegar facilmente a uma solução considerada óptima. Assim, tem-se:

Quantidade a Encomendar = **1 666** unidades; Ponto de Encomenda = 787,5≈ $\mathbf{788}$ unidades; Stock de Segurança = 787,5 -416,7 = **370,8** unidades; Probabilidade de Ruptura no ciclo = **2,2%;** Nº médio de unidades diferidas por ciclo = **1,5** unidades;

Custo médio (esperado) anual = $1\,100 * \frac{10\,000}{1\,666} + 8{,}625 * \left(\frac{1\,666}{2} + 370{,}8\right) + 66 * \frac{10\,000}{1\,666} * 1{,}5 \approx \mathbf{17\,571}\,\$$ (excluindo custos de aquisição)

Exemplo 27. Considere-se o exercício anterior, mas em que estudos empíricos indicam que a procura durante o prazo de reaprovisionamento é uma uniforme entre 100 e 730 unidades, mantendo-se a restante informação.

Como a procura não é exactamente a mesma, a procura média anual agora é $\boldsymbol{D} = \mathbf{9\,960}$ (= 415*24) unidades. Por resolução directa, aplicando (3.89), vem:

$\boldsymbol{Q}^* = \sqrt{\frac{\mathbf{2*1100*9\,960}}{\mathbf{8{,}625}}} * \sqrt{\frac{\mathbf{66*9\,960}}{\mathbf{66*9\,960-8{,}625*(730-100)}}} \approx \mathbf{1\,601}$ unidades e $\boldsymbol{r}^* = \mathbf{730} - \frac{\mathbf{1\,601*8{,}625}}{\mathbf{66*9\,960}} * (\mathbf{730} - \mathbf{100}) \approx \mathbf{717}$ unidades

$\boldsymbol{H}(\mathbf{717}) = \mathbf{0{,}021}$; $\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{X}, \mathbf{717})] = \frac{(\mathbf{730-717})^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2*(730-100)}} \approx$ 0,139; Stock Segurança = 717 – 415 ≈ 302

Custo médio (esperado) anual = $1\,100 * \frac{9\,960}{1\,601} + 8{,}625 * (\frac{1\,601}{2} + 302) + 66 * \frac{9\,960}{1\,601} * 0.14 \approx \mathbf{16\,407}\$$ (excluindo custos de aquisição)

Se aplicarmos o algoritmo numérico de Hadley e Whitin com a distribuição uniforme chegamos rapidamente a resultados muito semelhantes.

16. 2 Modelo $\langle Q;\ r\rangle$ com Vendas Diferidas e Custo de Ruptura Fixo

Este modelo é semelhante ao anterior, excepto no custo de ruptura, em que este é independente do número de unidades em ruptura, neste caso diferidas. Ou seja, neste caso, $p_f = p$ .Portanto, na expressão do custo médio anual, indicada atrás, apenas o valor esperado do número de rupturas por ciclo é substituído pela probabilidade de ruptura, vindo então

$$CT(Q,r) = A\frac{D}{Q} + IC\left[r - \mu + \frac{Q}{2}\right] + p\frac{D}{Q}\int_r^{\infty} f(x)dx \qquad (3.96)$$

Seguidamente determina-se os valores para Q e r que minimizam (3.96). Se estes valores verificarem as condições $0 < Q^* < \infty$ e $0 < r^* < \infty$, então Q^* e r^* são soluções do sistema de estacionariedade

$$\frac{\partial CT(Q,r)}{\partial Q} = -\frac{AD}{Q^2} + \frac{IC}{2} - \frac{pD}{Q^2}\int_r^{\infty} f(x)dx = 0 \qquad (3.97)$$

$$\frac{\partial CT(Q,r)}{\partial r} = IC - p\frac{D}{Q}f(r) = 0 \qquad (3.98)$$

Vindo

$$Q^* = \sqrt{\frac{2D[A+pH(r^*)]}{IC}} \qquad \text{e} \qquad f(r^*) = \frac{Q^*IC}{pD} \qquad (3.99)$$

Se eliminarmos Q no sistema (3.99), tem-se alternativamente

$$[f(r^*)]^2 = \frac{2IC[A+pH(r^*)]}{Dp^2} \qquad \text{ou} \qquad f(r^*) = \sqrt{\frac{2IC[A+pH(r^*)]}{Dp^2}} \qquad (3.100)$$

Nota 1. A resolução de (3.99) é feita iterativamente, começando-se com $\boldsymbol{H(r)=1}$.

Nota 2. Quando a procura é uma variável aleatória normal, sabe-se que $\boldsymbol{f(r)=\frac{1}{\sigma}\phi(\frac{r-\mu}{\sigma})}$**,** em que $\boldsymbol{f(r)}$ é a função de densidade da procura no prazo de reaprovisionamento e $\boldsymbol{\phi(\frac{r-\mu}{\sigma})}$ é a função de densidade da normal estandardizada.

Exemplo 28. Considere-se o exemplo 26, mas em que o custo de ruptura é de $\boldsymbol{1\,000}$ \$, independentemente do número de unidades em ruptura. Este problema não é muito fácil de resolver sem recorrer a técnicas de cálculo numérico, mas através da flexibilidade de excel é possível chegar rapidamente a uma solução.

No primeiro ensaio, partindo de $\boldsymbol{H(r)=1}$ obteve-se $\boldsymbol{r_1=511}$**.** Partindo deste valor, obtém-se $\boldsymbol{H(511)=0,30}$, que vai ser utilizado no segundo ensaio. O valor obtido é $\boldsymbol{r_2=567}$, vindo de seguida $\boldsymbol{H(567)=0,207}$**.**

Continuando assim, sucessivamente, chega-se aos seguintes valores finais: $\boldsymbol{Q^*\approx 1\,7}32$ unidades; $\boldsymbol{r^*\approx 575}$ unidades; $\boldsymbol{H(575)=0,194}$; Stock Segurança = $\boldsymbol{575-416,7\approx 158,3}$ unidades; $\boldsymbol{E[\eta(X,575\,)]=19,84}$.

Custo médio (esperado) anual = $\boldsymbol{1\,100*\frac{10\,000}{1\,732}+8,625*(\frac{1\,732}{2}+158,3)+1\,000*\frac{10\,000}{1\,732}*0,194\approx 16\,309}$ \$

16. 3 Modelo $\boldsymbol{\langle Q;\ r\rangle}$ com Vendas Diferidas e Custos de Ruptura Fixo e Variáveis

Este modelo combina os dois anteriores, considerando um custo de ruptura que é independente do número de unidades em ruptura, $\boldsymbol{p_f}$, e um outro que é proporcional ao número de unidades em falha e cujo custo unitário é $\boldsymbol{p_v}$. Portanto, na expressão do custo médio anual são consideradas os dois tipos de custos de ruptura, vindo então

$$CT(Q,r) = A\frac{D}{Q} + IC\left[r - \mu + \frac{Q}{2}\right] + p_f\frac{D}{Q}\int_r^{\infty} f(x)dx + p_v\frac{D}{Q}\left[\int_r^{\infty} xf(x)dx - rH(r)\right] \quad (3.101)$$

Seguidamente determinam-se os valores para Q e r que minimizam (3.101). Se estes valores verificarem as condições $0 < Q^* < \infty$ e $0 < r^* < \infty$, então Q^* e r^* são soluções do sistema de estacionariedade

$$\frac{\partial CT(Q,r)}{\partial Q} = -\frac{AD}{Q^2} + \frac{IC}{2} - p_f\frac{D}{Q^2}H(r) - p_v\frac{D}{Q^2}E[\eta(X,r)] = 0 \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial CT(Q,r)}{\partial r} = IC - p_f\frac{D}{Q}f(r) - p_v\frac{D}{Q}H(r) = 0 \quad (3.103)$$

Vindo

$$Q^* = \sqrt{\frac{2D[A + p_f H(r^*) + p_v E[\eta(X,r^*)]]}{IC}} \quad \text{e} \quad p_v H(r^*) + p_f f(r^*) = \frac{Q^* IC}{D} \quad (3.104)$$

cuja resolução é feita iterativamente ou através de um software adequado. O solver, do excel, permite uma resolução rápida.

Nota 1. Podemos então concluir que as expressões (3.91) e (3.99) são casos particulares do modelo geral (3.104), em que $p_f = 0$ e $p_v = 0$, respectivamente.

Nota 2. Quando p_f é muito pequeno comparado com p_v, simplifica-se eliminando p_f e substituindo p_v por $p = p_f + p_v$, em (3.104), que é equivalente a utilizar (3.91), em 16.1, com $p = p_f + p_v$.

Nota 3. Quando p_v é muito pequeno comparado com p_f, simplifica-se eliminando p_v e substituindo p_f por $p = p_f + p_v$, em (3.104), que é equivalente a utilizar (3.99) ou (3.100), dadas em 16.2, com $p = p_f + p_v$.

16. 4 Modelo $\langle \boldsymbol{Q};\ \boldsymbol{r} \rangle$ com Vendas Perdidas e Custos de Ruptura Variáveis

Este modelo difere do apresentado em 16.1 apenas no facto de a ruptura se traduzir na perda da venda. Por esse facto, o tratamento, também aproximado, será um pouco diferente do precedente. Como foi explicado nos modelos determinísticos, a minimização do custo médio anual é equivalente à maximização do resultado anual, desde, como é o caso, o custo de ruptura incorpore o benefício não realizado devido á perda da venda, para além de outros eventuais custos de ruptura que possam existir, chamados custos de ruptura em sentido estrito, como sejam eventuais indemnizações, penalizações, ou até mesmo "custos" atribuídos subjectivamente devido á degradação da imagem. Note-se que no modelo de vendas diferidas não existe perda do benefício conseguido com a venda do produto, pois esta continua a ocorrer, embora mais tarde e com custos. Neste caso o benefício total não realizado é sempre proporcional ao número de rupturas e independente do tempo. Havendo apenas um custo de ruptura, ele continua a designar-se por $\boldsymbol{p}$. Neste caso, de apenas custos de ruptura variáveis, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_v}$ e incorpora o beneficio não realizado.

Também contrariamente ao modelo de vendas diferidas, o número de ciclos por ano já não é dado pela relação $\boldsymbol{D/Q}$, mas sim por $\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{T_2}}$, em que $\boldsymbol{T_2}$ é o tempo, no ciclo, em que o sistema está em ruptura (ver ponto 6, 1ª parte). No entanto, como $\boldsymbol{T_2}$ representa normalmente um período de tempo curto, estabelece-se por hipótese que o número de ciclos é dado aproximadamente por $\boldsymbol{D/Q}$, constituindo uma hipótese a juntar às (1), (3) e (4), referidas no modelo de vendas diferidas, que se mantêm.

Depois destas hipóteses, a principal diferença em relação ao modelo de vendas diferidas está no cálculo do stock de segurança. O stock esperado disponível no momento da entrega da encomenda (imediatamente antes) é o stock de segurança $\boldsymbol{s}$, que é o stock mínimo esperado, e o stock esperado disponível imediatamente após a entrega da encomenda é $\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{s}$, que é o stock máximo esperado. Assim, o stock esperado disponível varia entre $\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{s}$ ao longo do ciclo, de comprimento médio aproximado $\boldsymbol{Q/D}$, sendo em média (o stock) $\boldsymbol{s}+\boldsymbol{Q/2}$. Seja então, novamente, $\boldsymbol{\varepsilon(X,r)}$ o stock disponível no momento (imediatamente antes) da entrega da encomenda e seja, igualmente, $\boldsymbol{X}$ a procura durante o prazo de reaprovisionamento e $\boldsymbol{r}$ o ponto de encomenda. Então:

$$\boldsymbol{\varepsilon(X,r)} = \begin{cases} \boldsymbol{r-X} & \boldsymbol{X \le r} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X > r} \end{cases}$$

Vindo

$$s = E[\varepsilon(X,r)] = \int_0^r (r-x)f(x)dx = \int_0^\infty (r-x)f(x)dx - \int_r^\infty (r-x)f(x)dx = r - \mu + \int_r^\infty (x-r)f(x)dx \qquad (3.105)$$

Sendo o custo anual médio com o stock igual a

$$IC\left[r - \mu + \frac{Q}{2} + \int_r^\infty (x-r)f(x)dx\right] \qquad (3.106)$$

Como a expressão do custo (esperado) anual médio de ruptura, tal como a expressão dos custos de encomenda, são formalmente idênticas às do correspondente modelo de vendas diferidas, tem-se para o custo (esperado) anual médio, excluindo custos de aquisição.

$$CT(Q,r) = A\frac{D}{Q} + IC\left[r - \mu + \frac{Q}{2} + \int_r^\infty (x-r)f(x)dx\right] + p\frac{D}{Q}\int_r^\infty (x-r)f(x)dx$$

ou

$$CT(Q,r) = A\frac{D}{Q} + IC\left[r - \mu + \frac{Q}{2}\right] + \left(IC + p\frac{D}{Q}\right)\int_r^\infty (x-r)f(x)dx \qquad (3.107)$$

Novamente determinam-se os valores para Q e r que minimizam (3.107). Se estes valores verificarem as condições $0 < Q^* < \infty$ e $0 < r^* < \infty$, então Q^* e r^* são soluções do sistema de estacionariedade

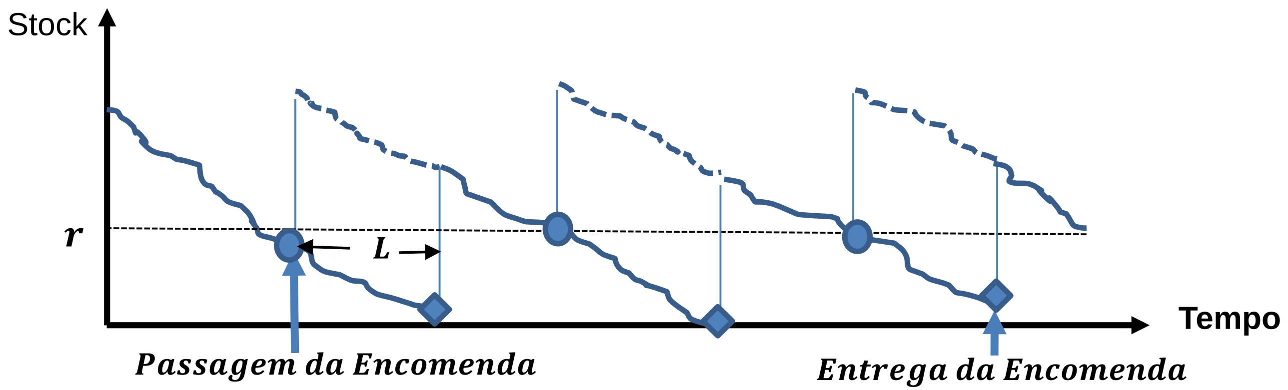
$$\frac{\partial CT(Q,r)}{\partial Q} = -\frac{AD}{Q^2} + \frac{IC}{2} - \frac{pD}{Q^2}E[\eta(X,r)] = 0 \qquad (3.108)$$

$$\frac{\partial CT(Q,r)}{\partial r} = IC + \left(IC + p\frac{D}{Q}\right)[-rf(r) + rf(r) - H(r)] = 0 \qquad (3.109)$$

vindo finalmente

$$\boldsymbol{Q^*} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2D\{A+pE[\eta(X,r)]\}}}{\boldsymbol{IC}}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{H(r^*)} = \frac{\boldsymbol{Q^*IC}}{\boldsymbol{Q^*IC+pD}} \tag{3.110}$$

Graficamente, o stock tem o seguinte comportamento evolutivo:



Nota. As notas 1, 2, indicadas atrás, na página 40, a propósito do correspondente modelo de vendas diferidas, aplicam-se também neste modelo.

Exemplo 29. Uma empresa comercializa um produto cuja procura anual é uma v. a. normal de média 10 000 unidades e desvio padrão 900. O custo à saída do fornecedor é de 50 \$/unidade. O frete custa 5 \$/unidade e o seguro custa 2% sobre o preço de aquisição. Ao entrar em armazém o produto tem custos de movimentação de 1 \$/unidade. Os custos de inspecção e controle têm uma componente fixa de 500 \$ e uma componente variável de 0,5 \$/unidade. O custo de cada encomenda é de 600 \$. O prazo de reaprovisionamento é de 15 dias e a taxa de posse é de 15% ao ano. Caso o produto não esteja disponível, a empresa vai à concorrência comprá-lo por 66 \$/unidade e paga um frete (incluindo seguro) de 1 \$/unidade, sendo imediatamente entregue.

Excepto no facto de se tratar de um sistema de vendas perdidas e ter um custo de ruptura diferente, tudo o resto é semelhante ao exemplo 24, de modo a facilitar os cálculos. De facto, trata-se de um sistema de vendas perdidas, não obstante os clientes serem satisfeitos pela mesma entidade. Acontece que quando uma encomenda chega ela não vai desviar parte dos produtos para satisfazer eventuais rupturas, como acontece no modelo de vendas diferidas, mas ser vendido normalmente. Parte da venda é feita pela concorrência, ainda que indirectamente através da empresa. Assim:

$\boldsymbol{D} = \mathbf{10\,000}$ unidades; $\boldsymbol{C} = \mathbf{50 + 5 + 0,02 * 50 + 1 + 0,5 = 57,5}$ \$; $\boldsymbol{I} = \mathbf{0,15}$; $\boldsymbol{IC} = \mathbf{0,15 * 57,5 = 8,625}$; $\boldsymbol{p} = \mathbf{66 - 57,5 + 1 = 9,5}$ \$**;** $\boldsymbol{A} = \mathbf{500 + 600 = 1\,100}$**;** $\boldsymbol{E(X) = \mu} = \mathbf{\frac{1}{24} * 10\,000 = 416,7}$; $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{900\sqrt{\frac{1}{24}} = 183,71}$; $\boldsymbol{X}$ é uma variável aleatória normal de média **416,7** e desvio padrão **183,71.**

Recorrendo ao algoritmo de Hadley-Whitin, vem

Passo 0. calcular $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{r}$ a partir de (3.106) considerando $\boldsymbol{E[\eta(X,r)]} = \mathbf{0}$, isto é, $\boldsymbol{Q}$ de Wilson e o $\boldsymbol{r}$ correspondente:

$\boldsymbol{Q_0} = \sqrt{\frac{\mathbf{2*10\,000*1\,100}}{\mathbf{8,625}}} = \mathbf{1\,597,1}$; $\boldsymbol{H(r_0)} = \frac{\mathbf{1\,597,1*8,625}}{\mathbf{9,5*10\,000+1\,597,1*8,625}} = \mathbf{0,1266}$**;** $\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\boldsymbol{r_0}\mathbf{-416,7}}{\mathbf{183,71}}\right) = \mathbf{0,8734}$**;** $\boldsymbol{r_0} = \mathbf{626,5}$

Passo 1. considerando o $\boldsymbol{r}$ anteriormente obtido, calcular $\boldsymbol{E[\eta(X,r)]}$**,** e, a partir deste, novos $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{r}$:

$\boldsymbol{E[\eta(X, 626,5\,)]} = \mathbf{183,71} * \boldsymbol{NL}\left(\frac{\mathbf{626,5-416,7}}{\mathbf{183,71}}\right) = \mathbf{11,6}$; $\boldsymbol{Q_1} = \sqrt{\frac{\mathbf{2*10\,000*(1\,100+9,5*11,6)}}{\mathbf{8,625}}} = \mathbf{1\,675,1}$;

$\boldsymbol{H(r_1)} = \frac{\mathbf{1\,675,1*8,625}}{\mathbf{9,5*10\,000+1\,675,1*8,625}} = \mathbf{0,132}$**;** $\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\boldsymbol{r_1}\mathbf{-416,7}}{\mathbf{183,71}}\right) = \mathbf{0,868}$**;** $\boldsymbol{r_1} = \mathbf{621,9}$

Passo 2. repetindo o processo, vem

$\boldsymbol{E[\eta(X, 621,9\,)] = 183,71 * NL\left(\frac{621,9-416,7}{183,71}\right) = 12,2};$ $\boldsymbol{Q_2 = \sqrt{\frac{2*10\,000*(1\,100+9,5*12,2)}{8,625}} = 1\,679,1};$

$\boldsymbol{H(r_2) = \frac{1\,679,1*8,625}{9,5*10\,000+1\,679,1*8,625} = 0,1323;}$ $\boldsymbol{\Phi\left(\frac{r_2-416,7}{183,71}\right) = 0,8677;\ r_2 = 621,6}$

Como o ponto de encomenda obtido é praticamente igual ao anterior, não necessitamos de prosseguir, podendo assumir como boa aproximação à solução óptima a seguinte:

Quantidade a Encomendar = **1 679** unidades; Ponto de Encomenda = **622** unidades; Stock de Segurança = $621,6 - 416,7 + 12,2 = \mathbf{217,1}$ unidades; Probabilidade de Ruptura no ciclo = **13,2%;** Nº médio de unidades perdidas por ciclo = **12,2** unidades;
Custo médio (esperado) anual = $1\,100 * \frac{10\,000}{1\,679} + 8,625 * \left(\frac{1\,679}{2} + 217,1\right) + 9,5 * \frac{10\,000}{1\,679} * 12,2 \approx \mathbf{16\,357}\ \$$ (excluindo custos de aquisição).

16. 5 Modelo $\langle \boldsymbol{Q};\ \boldsymbol{r} \rangle$ com Vendas Perdidas e Custos de Ruptura Fixo e Variáveis

Nesta caso assume-se que para além de um custo variável, que inclui o benefício não realizado com a perda da venda, existe um custo de ruptura fixo, independente da dimensão das vendas perdidas no ciclo.

Conjugando o que foi dito com as análises anteriores, a expressão do custo total (esperado) anual vem então

$$\boldsymbol{CT(Q,r) = A\frac{D}{Q} + IC\left[r - \mu + \frac{Q}{2} + \int_r^{\infty}(x-r)f(x)dx\right] + p_f\frac{D}{Q}\int_r^{\infty} f(x)dx + p_v\frac{D}{Q}\int_r^{\infty}(x-r)f(x)dx}$$

ou

$$CT(Q,r) = A\frac{D}{Q} + IC\left[r - \mu + \frac{Q}{2}\right] + p_f\frac{D}{Q}\int_r^{\infty} f(x)dx + (IC + p_v\frac{D}{Q})\int_r^{\infty}(x-r)f(x)dx \qquad (3.111)$$

em que p_f é o custo de ruptura fixo e p_v é o custo de ruptura variável, incluindo o benefício não realizado, como foi definido no inicio do ponto anterior.

O sistema de estacionariedade é então

$$\frac{\partial CT(Q,r)}{\partial Q} = -\frac{AD}{Q^2} + \frac{IC}{2} - p_f\frac{D}{Q^2}H(r) - p_v\frac{D}{Q^2}E[\eta(X,r)] = 0 \qquad (3.112)$$

$$\frac{\partial CT(Q,r)}{\partial r} = IC - p_f\frac{D}{Q}f(r) - ICH(r) - p_v\frac{D}{Q}H(r) = 0 \qquad (3.113)$$

vindo, após resolução,

$$Q^* = \sqrt{\frac{2D\{A+p_fH(r^*)+p_vE[\eta(X,r^*)]\}}{IC}} \quad \text{e} \quad \frac{p_ff(r^*)+p_vH(r^*)}{1-H(r^*)} = \frac{Q^*IC}{D} \qquad (3.114)$$

Este sistema é igualmente resolvido de forma iterativa, até obter uma solução razoavelmente aproximada, situação actualmente facilitada pelos meios de cálculo automático disponíveis.

Nota 1. Quando p_f é muito pequeno comparado com p_v, simplifica-se a expressão anterior eliminando p_f e substituindo p_v por $p = p_f + p_v$, ou seja aplica-se (3.110) com $p = p_f + p_v$.

Nota 2. Quando $\boldsymbol{p_v}$ é muito pequeno comparado com $\boldsymbol{p_f}$, faz-se uma simplificação semelhante, mas em que $\boldsymbol{p_f}$ é substituído por $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_f} + \boldsymbol{p_v}$ e $\boldsymbol{p_v}$ anulado, vindo

$$\boldsymbol{Q^*} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2D[A+pH(r^*)]}}{\boldsymbol{IC}}} \quad \text{e} \quad \frac{\boldsymbol{f(r^*)}}{\boldsymbol{1-H(r^*)}} = \frac{\boldsymbol{Q^*IC}}{\boldsymbol{pD}} \tag{3.115}$$

cujo sistema continua a ser resolvido de forma iterativa. Esta situação é equivalente ao caso em que existe apenas um custo de ruptura independente do número de vendas perdidas, o que em rigor não é verdade, pois o beneficio não realizado é, em principio, proporcional ao número de vendas perdidas; acontece que pode ser muito pequeno quando comparado com o custo de ruptura fixo.

Exemplo 30. Suponha-se o exemplo anterior, mas em que adicionalmente existe uma penalização de 1 000 \$ no caso de falha no fornecimento do produto, uma vez que o comprador tem de activar mecanismos de emergência no seu processo produtivo.

Para além da informação anterior, o custo de ruptura é constituído por $\boldsymbol{p_f = 1\,000}$ \$ e por $\boldsymbol{p_v = 9,5}$ \$. Dado que $\boldsymbol{p_v}$ é pequeno comparado com $\boldsymbol{p_f}$, vamos assumir $\boldsymbol{p = 1\,009,5\ \$}$ e aplicar (3.115).

Passo 1. Fazendo inicialmente $\boldsymbol{H(r=0) = 1}$, vem $\boldsymbol{Q_0} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2*10\,000*(1\,100+1\,009,5*1)}}{\boldsymbol{8,625}}} = \boldsymbol{2\,211,7}$; $\frac{\boldsymbol{f(r_0)}}{\boldsymbol{1-H(r_0)}} = \frac{\boldsymbol{2\,211,7*8,625}}{\boldsymbol{1\,009,5*10\,000}} = \boldsymbol{0,00189}$; $\boldsymbol{r_0 = 572,8}$

Passo 2. $\boldsymbol{H(r_0) = 0,1977}$, $\boldsymbol{Q_1} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2*10\,000*(1\,100+1\,009,5*0,1977)}}{\boldsymbol{8,625}}} = \boldsymbol{1\,735,9}$; $\frac{\boldsymbol{f(r_1)}}{\boldsymbol{1-H(r_1)}} = \frac{\boldsymbol{1\,735,9*8,625}}{\boldsymbol{1\,009,5*10\,000}} = \boldsymbol{0,00148}$; $\boldsymbol{r_1 = 608}$

Passo 3. $\boldsymbol{H(r_1) = 0,1488}$, $\boldsymbol{Q_2 = \sqrt{\frac{2*10\,000*(1\,100+1\,009,5*0,1488)}{8,625}} = 1\,702,7}$; $\boldsymbol{\frac{f(2)}{1-H(r_2)} = \frac{1\,702,7*8,625}{1\,009,5*10\,000} = 0,00145}$; $\boldsymbol{r_2 = 610,7}$

Passo 4. $\boldsymbol{H(r_2) = 0,1454}$, $\boldsymbol{Q_3 = \sqrt{\frac{2*10\,000*(1\,100+1\,009,5*0,1454)}{8,625}} = 1\,700,3}$; $\boldsymbol{\frac{f(r_3)}{1-H(r_3)} = \frac{1\,700,3*8,625}{1\,009,5*10\,000} = 0,00145}$;
Verifica-se que os valores obtidos são praticamente idênticos, pelo que os últimos são uma boa aproximação à solução óptima. Temos finalmente:

Quantidade a Encomendar = **1 700** unidades; Ponto de Encomenda = **611** unidades; Stock de Segurança = 610,7-416,7+13,7 = **207,8** unidades; Probabilidade de Ruptura no ciclo = **14,5%;** Nº médio de unidades perdidas por ciclo = **13,7** unidades;
Custo médio (esperado) anual = $1\,100 * \frac{10\,000}{1\,700} + 8{,}625 * \left(\frac{1\,700}{2} + 207{,}8\right) + 1000 * \frac{1\,000}{1\,700} * 0{,}145 + 9{,}5 * \frac{10\,000}{1\,700} * 13{,}7 \approx \mathbf{17\,217}$$ (excluindo custos de aquisição).

16.6 Modelo $\langle Q;\ r\rangle$ com Nível de Serviço

Inúmeras vezes o custo de ruptura é difícil de estimar. Para obviar situações em que não se conhece o custo de ruptura, é frequente estabelecerem-se medidas de performance para as políticas preconizadas e que orientam a sua escolha. Estas medidas são por vezes designadas por *Medidas do Nível de Serviço.* Claro que a dificuldade em estabelecer um custo de ruptura pode existir, mas a solução para contornar esta dificuldade apenas na aparência a contorna, pois no fundo estabelecer uma medida de performance acaba por ser equivalente a considerar, embora de forma implícita, um custo de ruptura, mas não há dúvida que pode ser mais fácil pela maior sensibilidade que um gestor, nomeadamente de stocks, possa ter a certos indicadores de gestão.

Embora se possam conceber outras medidas de performance, as medidas habitualmente consideradas para orientar a escolha da política são as seguintes:

1. **Medida 1 para o Nível de Serviço, com o acrónimo do inglês *SLM1***
2. **Medida 2 para o Nível de Serviço, com o acrónimo do inglês *SLM2***

1. Medida *SLM1*

Esta medida estabelece uma percentagem para a procura esperada que é anualmente satisfeita, isto é

$$SLM1 = 1 - \frac{E[\eta(X,r)]\frac{D}{Q}}{D} = \alpha_1 = 1 - \frac{E[\eta(X,r)]}{Q} \quad \text{ou} \quad E[\eta(X,r)] = (1-\alpha_1)Q \qquad (3.116)$$

Como Q é desconhecido, considera-se o Q de Wilson e, depois de fixado o valor de $SLM1 = \alpha_1$, obtém- se o valor de r. Os valores obtidos para Q e r caracterizam a política e a partir deles podemos obter a restante informação de gestão, stock de segurança e probabilidade de ruptura, por exemplo.

2. Medida *SLM2*

Com esta medida estabelece-se um valor para o número esperado de ciclos durante o ano em que ocorre ruptura. Seja α_2 esse valor. Então

$$SLM2 = P(X > r)\frac{D}{Q} = \alpha_2 \quad \text{ou} \quad P(X > r) = \alpha_2\frac{Q}{D} \qquad (3.117)$$

Igualmente aqui, como Q é desconhecido, considera-se o Q de Wilson e, depois de fixado o valor de α_2, obtém- se o valor de r. No restante procede-se como na medida anterior.

Exemplo 31. considere-se o exemplo 26, mas em que se desconhece o custo de ruptura, mas se estabeleceram as seguintes medidas de performance: para ***SLM1*** estabeleceu-se o valor de **98%** e para ***SLM2*** estabeleceu-se o valor de **0,5**. Ou seja, vamos obter duas políticas, uma admitindo que a procura não satisfeita anualmente é 2% e a outra em que se admite que o número esperado de ciclos com ruptura é de 0,5. O sistema é de vendas diferidas.

1. Política com medida *SLM1*

$\boldsymbol{Q_w = 1\,597,1;\quad SLM1 = 1 - \frac{E[\eta(X,r)]}{Q} = \alpha_1 = 0,98,}$ ou seja, $\boldsymbol{E[\eta(X,r)] = 0,02Q = 31,942;\ E[\eta(X,r)] = \sigma NL\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)}$

$\boldsymbol{E[\eta(X,r)] = 183,71 NL\left(\frac{r-416,7}{183,71}\right) = 31,942;\ NL\left(\frac{r-416,7}{183,71}\right) = 0,1739;\ \frac{r-416,7}{183,71} = 0,58;\ r = 523,2;\ H(523,2) = 0,281}$

Então:
Quantidade a encomendar = **1 597**; Ponto de encomenda = **523**; Stock de Segurança = **106,5**; probabilidade de ruptura no ciclo = **28,1%**; Nº esperado de rupturas por ciclo = **31,9**. No caso de custos de ruptura proporcionais, a título de curiosidade, pode ser obtido o "custo de ruptura" equivalente (implícito) através da expressão

$$\boldsymbol{H(523,2) = \frac{1\,597 * 8,625}{10\,000\,p} = 0,281}$$

vindo $\boldsymbol{p = 4,9,}$ valor por sinal bastante mais baixo do que o considerado no exemplo 26, o que explica a maior parte das diferenças entre esta política e a inicial. Outra parte da explicação, embora menos relevante, tem a ver com o facto de se utilizar o $\boldsymbol{Q}$ de Wilson em vez de $\boldsymbol{Q^*}$.

2. Política com medida *SLM2*

$\boldsymbol{Q_w = 1\,597,1;\quad SLM2 = P(X > r)\frac{D}{Q} = \alpha_2 = 0,5,}$ ou seja, $\boldsymbol{P(X > r) = 0,05 * \frac{1\,597}{10\,000} = 0,08;\ r = 675;\ E[\eta(X,675)] = 6,6}$

Então:

Quantidade a encomendar = **1 597**; Ponto de encomenda = **675**; Stock de Segurança = **258,3**; probabilidade de ruptura no ciclo = **8%**; Nº esperado de ruptura por ciclo = **6,6**. Igualmente, no caso de custos de ruptura proporcionais, o "custo de ruptura" equivalente pode ser obtido através da expressão

$$\boldsymbol{H(675) = \frac{1\,597 * 8,625}{10\,000\,p} = 0,08}$$

vindo $\boldsymbol{p = 17,25,}$ valor superior ao anterior mas ainda bastante baixo do que o considerado no exemplo 26, o que explica a menor diferença no ponto de encomenda.

Nota 1. Estas medidas do nível de serviço podem ser utilizadas tanto em sistema de vendas perdidas como em sistema de vendas diferidas. O cálculo do ponto de encomenda é feito da mesma forma, apenas o stock de segurança é diferente, já que no caso de vendas diferidas tem mais o número médio de vendas perdidas por ciclo. Também o "custo de ruptura" equivalente, cujo o interesse é limitado, é diferente, aplicando-se, num e noutro caso, as respectivas fórmulas.

Nota 2. Vamos supor que $\boldsymbol{NL\left(\frac{r-416,7}{183,71}\right) = 0,50}$. Este valor não se encontra directamente na tabela da função $\boldsymbol{NL(y),}$ pois a tabela começa em $\boldsymbol{NL(0) = 0,3989}$ e apresenta valores decrescentes (porquê?). Isto significa que $\boldsymbol{\frac{r-416,7}{183,71} = y}$ deve ser negativo. Aplicando a propriedade $\boldsymbol{NL(y) = NL(-y) - y,}$ quando $\boldsymbol{y \leq 0,}$ referida atrás, tem-se $\boldsymbol{NL(-y) - y} = 0{,}50$. Consultando a tabela, somando as duas parcelas de modo a obter um valor próximo de 0,50, chegamos a $\boldsymbol{-y = 0,19\ (0,19 + 0,31111).}$ Vem, então, finalmente, $\boldsymbol{\frac{r-416,7}{183,71} = y} = -0{,}19$, com $\boldsymbol{r \approx 381,8.}$

17. Modelos Aleatórios de Revisão Periódica ou de Calendário

Tal como os modelos de ponto de encomenda, estes modelos são também de natureza sequencial. Nestes modelos, as encomendas são feitas com uma periodicidade fixa, a determinar, e o seu montante depende do stock existente no momento em que se faz a encomenda, também chamado momento da revisão do stock. A periodicidade é chamada *Período ou Intervalo da Revisão*. Como o stock no momento da revisão varia com a intensidade da procura, nos modelos de calendário encomendam-se quantidades variáveis em intervalos de tempo fixos, aspecto que os torna diferentes dos modelos de ponto de encomenda, em que se encomendam quantidades fixas em intervalos de tempo variáveis. Como verificamos na primeira parte, quando estudamos os modelos determinísticos, nestes sistemas os modelos de ponto de encomenda e os modelos de calendário são idênticos, o que não acontece nos modelos aleatórios, por via da incerteza (aleatoriedade) no comportamento do stock.

No mundo real, encontram-se os dois tipos de sistema, mais o de calendário no passado, mais o de ponto de encomenda actualmente, muito devido ao desenvolvimentos dos sistemas informáticos. Se excluirmos os custos de tratamento da informação e as eventuais dificuldades administrativas na gestão dos stocks, em geral os sistemas de ponto de encomenda possibilitam, em condições de óptimo, um menor investimento médio em stocks, contribuindo geralmente para maiores benefícios médios anuais.

Dentro dos sistemas de calendário são, em geral, estabelecidas três tipos de políticas, das quais a mais generalizada, e que aqui apresentamos, é a *Política de Encomenda até* $\boldsymbol{R}$. De acordo com esta política, no momento da revisão ocorrerá uma encomenda de modo a levar o stock até ao nível $\boldsymbol{R}$, a determinar, desde que que entretanto tenha ocorrido pelo menos uma venda (uma unidade vendida), o que no caso contínuo ocorrerá com probabilidade um. Esta política é usualmente designada por política $\langle \boldsymbol{R};\ \boldsymbol{T} \rangle$.

Uma outra política consiste em encomendar na data fixada desde que o stock no momento da revisão seja inferior a $\boldsymbol{r}$ $(\boldsymbol{r} < \boldsymbol{R})$, pretendendo-se com a encomenda levar o stock igualmente até $\boldsymbol{R}$. É fácil de verificar que a política anterior é um caso particular desta, em que $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} - \mathbf{1}$, quando o stock é uma variável discreta e $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}$ quando é contínua. Esta política é designada por política $\langle \boldsymbol{R};\ \boldsymbol{r};\ \boldsymbol{T} \rangle$.

A terceira política corresponde a uma situação intermédia entre as duas anteriores, em que é passada uma encomenda se o stock não for superior a $\boldsymbol{r}$, mas a quantidade a encomendar é um múltiplo de um $\boldsymbol{Q}$**,** isto é, $\boldsymbol{nQ}$**,** $\boldsymbol{n = 1, 2, \ldots}$ O valor de $\boldsymbol{n}$ corresponde ao maior inteiro tal que o nível de recursos depois da encomenda seja inferior ou igual a $\boldsymbol{R = r + Q}$. Esta política é conhecida como política $\langle \boldsymbol{nQ};\ \boldsymbol{r};\ \boldsymbol{T} \rangle$**.**

Nos modelos de ponto de encomenda, dado supor-se que que os custos de utilização do modelo são independentes da política, isto é, de $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{r}$**,** estes não estão incluídos**.** Nos modelos de calendário, a escolha do ciclo das revisões, isto é, a escolha de $\boldsymbol{T}$ depende do custo da revisão, que é diferente do custo de encomenda, embora tenham uma natureza semelhante, em função do número de revisões.

17. 1 Modelo $\langle \boldsymbol{R};\ \boldsymbol{T} \rangle$ com Vendas Diferidas e Custos de Ruptura Variáveis

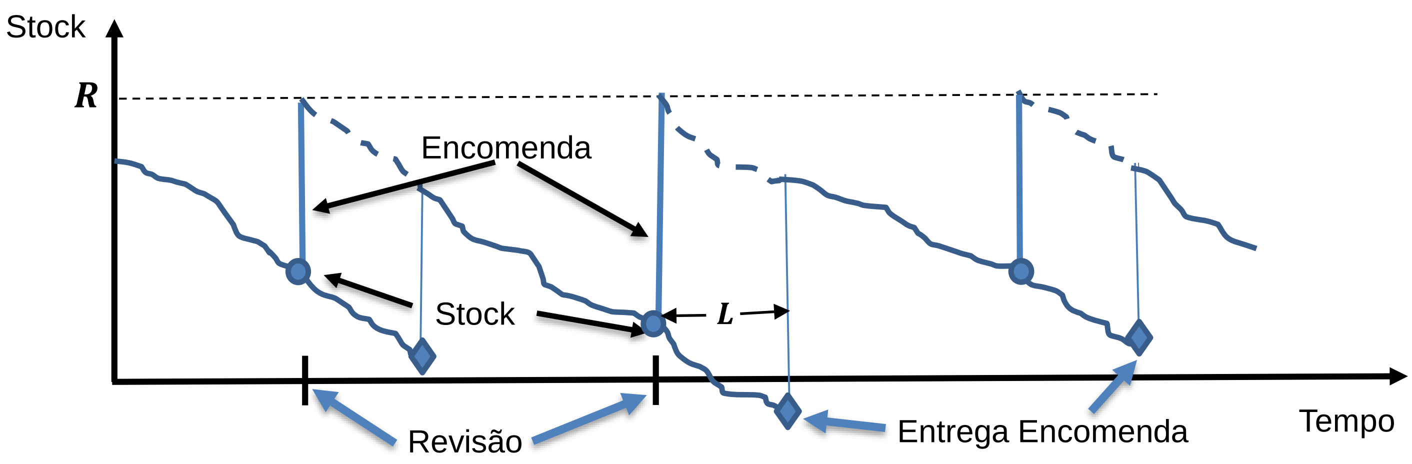
Tal como os anteriores, também estes modelos são modelos aproximados, baseados em várias hipóteses, cujas principais explicitaremos de seguida. Como já dissemos, estas hipóteses tornam estes modelos de muito mais fácil aplicação prática, sem lhes retirar importância, visto manterem, em geral, uma grande aderência a inúmeras situações. Permitem, além disso, compreender mais facilmente o essencial do funcionamento do sistema de stocks. Como se disse, o sistema tem apenas uma instalação, e está em causa a gestão de um único produto. Caso existem outros produtos, supõe-se que são independentes. Finalmente, supõe-se que as variáveis são contínuas.

O comprimento do ciclo é $\boldsymbol{T}$**,** a determinar posteriormente, e corresponde ao intervalo de tempo entre duas revisões consecutivas. Em cada revisão procede-se a uma encomenda para levar o stock até $\boldsymbol{R}$, cujo valor óptimo se pretende determinar, estabelecendo as seguintes hipóteses:

1. O custo de uma revisão, designado por $\boldsymbol{J}$**,** é independente de $\boldsymbol{R}$ e de $\boldsymbol{T}$**;**
2. O custo unitário do produto é constante e independente da quantidade a encomendar**;**

3. O número de rupturas (vendas diferidas) é pequeno, o mesmo acontecendo com o tempo em ruptura. A chegada de uma encomenda permite satisfazer todas as unidades diferidas;
4. Tal como no modelo de Ponto de Encomenda, o custo de ruptura, por venda diferida, é assumido ser independente do tempo em ruptura, visto este em geral ser muito pequeno. Genericamente designa-se por $\boldsymbol{p}$, podendo ser um custo por unidade diferida ou ser um custo fixo independente do número de unidades diferidas. Quando existirem os dois custos, o primeiro é proporcional ao número de unidades em ruptura e terá como custo unitário $\boldsymbol{p_v}$ (custo variável) e o segundo é fixo e independente do número de unidades em ruptura e é designado $\boldsymbol{p_f}$, à semelhança do que foi considerado nos modelos de Ponto de encomenda;
5. Supõe-se que o prazo de reaprovisionamento é constante.

Graficamente, o stock tem a seguinte evolução:



Custos de Revisão e encomenda

Como em cada ciclo há uma revisão e uma encomenda, os custos anuais são dados por

$$\frac{J}{T} + \frac{A}{T} = \frac{K}{T} \qquad (K = J + A) \tag{3.118}$$

Custos de Posse do Stock

Como a taxa de procura por unidade de tempo é constante (a procura por unidade de tempo mantém o mesmo comportamento probabilístico), o stock médio resulta da média entre o stock máximo esperado e o stock mínimo esperado.

Através do gráfico verifica-se que quer o stock máximo quer o stock são variáveis aleatórias. O stock máximo ocorre após a chegada da encomenda e é dado por $R - X$, em que X é a procura durante o prazo de reaprovisionamento. O seu valor provável, ou esperado, será então $R - E(X) = R - \mu$.

Por outro lado o stock mínimo ocorre imediatamente antes da chegada da encomenda, verificando-se pelo gráfico que é dado por $R - X - X_T$, em que X_T é a procura (aleatória) durante o ciclo T. O seu valor esperado representa o stock de segurança e é $s = R - E(X) - E(X_T) = R - \mu - TD$. Como $X_{L+T} = X + X_T$ ($X_L = X$, como se disse), o stock de segurança depende da procura esperada no intervalo de tempo $L + T$, sendo $s = R - E(X_{T+L})$, ao contrário do que acontece nos modelos de ponto de encomenda em que depende apenas da procura esperada no prazo de reaprovisionamento L. Já se disse que neste modelo a quantidade a encomendar é uma variável aleatória (encomendam-se quantidades variáveis em intervalos de tempo fixos). Verifica-se facilmente que essa variável aleatória é X_T e o seu valor esperado é TD, isto é, em média encomenda-se a quantidade correspondente à procura esperado no ciclo T.

O stock médio é então dado pela média do stock máximo e do stock mínimo , isto é, $R - \mu - \frac{TD}{2}$, vindo, atendendo à hipótese 3, para o custo médio anual de posse do stock

$$IC\left[R - \mu - \frac{TD}{2}\right] \tag{3.119}$$

Custos de Ruptura de Stock

Para determinar o custo de ruptura anual começa por determinar-se o custo de ruptura no ciclo, o qual se multiplica pelo número de ciclos anuais, que é $\boldsymbol{1/T}$. As encomendas ocorrem no momento da revisão, com periodicidade $\boldsymbol{T}$. Para fixar ideias, seja $\boldsymbol{t}$ o momento em que foi lançada uma encomenda; essa encomenda será recebida no momento $\boldsymbol{t+L}$, e a seguinte no momento $\boldsymbol{t+L+T}$. Com a passagem da encomenda, os recursos do sistema (stock mais o montante encomendado) passam a $\boldsymbol{R}$. Deste modo, haverá ruptura se a procura durante o período $\boldsymbol{L+T}$ ultrapassar o nível $\boldsymbol{R}$ de recursos do sistema, isto é, se $\boldsymbol{X_{L+T} > R}$. Note-se que a variável aleatória envolvida no cálculo da ruptura é $\boldsymbol{X_{L+T}}$, e não $\boldsymbol{X}$, como acontece nos modelos de ponto de encomenda. Por exemplo, uma encomenda passada no momento $\boldsymbol{t}$ chega no momento $\boldsymbol{t+L}$, e a próxima encomenda chegará no momento $\boldsymbol{t+L+T}$. Portanto, as unidades diferidas entre $\boldsymbol{t+L}$ e $\boldsymbol{t+L+T}$ estão relacionadas com a encomenda passada no momento $\boldsymbol{t}$. Analisemos o que se passa com as rupturas associadas a este momento. Como a próxima encomenda só chega no momento $\boldsymbol{t+L+T}$ e a encomenda passada em $\boldsymbol{t}$ levou o stock até $\boldsymbol{R}$, uma unidade diferida está associada à encomenda feita em $\boldsymbol{t}$ se e só se a procura entre $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{t+L+T}$ é superior a $\boldsymbol{R}$. Deste modo, designando por $\boldsymbol{\eta(X_{L+T}, R)}$, ou simplesmente $\boldsymbol{\eta(R,\ T)}$, a variável aleatória número de unidades em ruptura no ciclo, vem :

$$\boldsymbol{\eta(R,T) = \eta(X_{L+T}, R) = \begin{cases} 0 & X_{L+T} < R \\ X_{L+T} - R & X_{L+T} \geq R \end{cases}}$$

sendo o seu valor esperado, no caso contínuo, dado por

$$\boldsymbol{E[\eta(R,T)] = \int_R^{\infty} (x_{L+T} - R) f(x_{L+T}) dx_{L+T}} \qquad (3.120)$$

O custo esperado anual de ruptura será então

$$\boldsymbol{p \frac{1}{T} \int_R^{\infty} (x_{L+T} - R) f(x_{L+T}) dx_{L+T}} \qquad (3.121)$$

em que $\boldsymbol{f(x_{L+T})}$ é a função de densidade da procura no período $\boldsymbol{L+T}$.

A expressão do custo médio anual esperado vem então

$$\boldsymbol{CT(R,T) = \frac{K}{T} + IC\left[R - \mu - \frac{TD}{2}\right] + p\frac{1}{T}\int_R^{\infty}(x_{L+T} - R)f(x_{L+T})dx_{L+T}} \tag{3.122}$$

Para $\boldsymbol{T}$ dado, o valor de $\boldsymbol{R}$ deve verificar a condição de estacionariedade,

$$\boldsymbol{\frac{\partial CT(R,T)}{\partial R} = IC + \frac{p}{T}\left[-Rf(R) + Rf(R) - \int_R^{\infty} f(x_{L+T})dx_{L+T}\right] = 0} \tag{3.123}$$

sendo, finalmente, o valor óptimo $\boldsymbol{R^*}$ a solução da equação

$$\boldsymbol{\int_R^{\infty} f(x_{L+T})dx_{L+T} = H(R,T) = \frac{ICT}{p}} \tag{3.124}$$

Para determinar o valor óptimo de $\boldsymbol{T}$, uma alternativa consiste em proceder de forma semelhante e resolver a equação que resulta de $\boldsymbol{\frac{\partial CT(R,T)}{\partial T} = 0}$ em simultâneo com (3.124), utilizando, por exemplo, o método de Newton. No entanto, uma alternativa mais simples consiste em simular vários valores para T e resolver sucessivamente (3.124) e obter o valor para o custo total, isto é, (3.122)**.** Este método, apesar de laborioso, é bastante simples e permite facilmente obter o valor $\boldsymbol{T^*}$.

Nota 1. Quando $\boldsymbol{\frac{ICT}{p} > 1}$, (3.124) não tem solução, pois $\boldsymbol{H(R,T)}$ é uma probabilidade. No entanto, tal não deverá ocorrer se permanecerem válidas as hipóteses consideradas. Por outro lado, significa que se considerou um custo de ruptura muito pequeno comparado com o custo de posse, o que pode não ser realista.

Nota 2. Suponha-se que o prazo de reaprovisionamento é aleatório e admitindo que as encomendas são recebidas pela ordem em com que são feitas. Seja $g(L)$ a respectiva função de densidade, com valor mínimo $\underline{L}$ e valor máximo $\overline{L}$ e em que L_1 representa o tempo que demora a encomenda feita em t e L_2 o tempo que demora a encomenda feita em $t+T$. O número esperado de rupturas no ciclo é igual a

$$\int_{\underline{L}}^{\overline{L}}\int_{\underline{L}}^{\overline{L}}\int_{R}^{\infty}(x_{L_2+T}-R)f(x_{L_2+T})g(L_2)g(L_1)dx_{L_2+T}\,dL_2dL_1=\int_{R}^{\infty}\int_{\underline{L}}^{\overline{L}}(x_{L_2+T}-R)f(x_{L_2+T})g(L_2)dx_{L_2+T}\,dL_2 \qquad (3.125)$$

visto que

$$\int_{\underline{L}}^{\overline{L}} g(L_1)dL_1=1$$

Fazendo $\int_{\underline{L}}^{\overline{L}} f(x_{L_2+T})g(L_2)dL_2=\hat{h}(x_{L_2+T})$, o número esperado de rupturas é igual a

$$\int_{R}^{\infty}(x_{L_2+T}-R)\hat{h}(x_{L_2+T})dx_{L_2+T} \qquad (3.125a)$$

Para que (3.125) seja válida é necessário que $\overline{L}<\underline{L}+T$. Neste caso, vem para R^* a solução da equação

$$\hat{H}(R,T)=\frac{ICT}{p}$$

em que $\hat{H}(R,T)=\int_{R}^{\infty}\hat{h}(x_{L_2+T})dx_{L_2+T}$. Quando o prazo de reaprovisionamento é constante, resulta então que $\hat{H}(R,T)=H(R,T)$ e, consequentemente, $\hat{h}(x_{L_2+T})=f(x_{L+T})$.

Exemplo 32. Uma empresa decide rever mensalmente, com um custo de 200€, o seu stock para decidir o montante a encomendar. Cada encomenda custa 800 €. Cada unidade procurada e não satisfeita é diferida, havendo um custo de 200 €.

O custo unitário do produto é de 100 € e a taxa de posse é de 12% ao ano. A procura por unidade de tempo é normal, tendo no caso mensal uma média de 100 unidades e um desvio padrão de 20. o prazo de reaprovisionamento é de uma semana.

Pelos dados do problema, sabe-se que $\boldsymbol{E(X_{L+T}) = 100 + \frac{1200}{52} = 123,1}$, $\boldsymbol{V(X_{L+T}) = 20^2 + 12 * \frac{20^2}{52} = 492,16}$, $\boldsymbol{\sigma_{L+T} = 22,2}$
(Aplicando (3.124), vem

$$\boldsymbol{H(R^*, T) = \frac{ICT}{p} = \frac{0,12 * 100 * 1/12}{200} = 0,005}$$

$$\boldsymbol{\Phi\left(\frac{R^* - 123,1}{22,2}\right) = 0,995} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R^* = 180,2 \approx 180}$$

Stock de Segurança = $\boldsymbol{180,2 - 23,1 - 100 = 57,1}$

Número esperado de rupturas = $\boldsymbol{\int_{180,2}^{\infty} (x_{L+T} - 180,2) f(x_{L+T}) dx_{L+T} = 22,2 * 0,0145 - 57,1 * 0,005 \approx 0,035}$

Custo anual (excluindo c. aquisição) = $\boldsymbol{1\,000 * 12 + 0,12 * 100 * \left(180,2 - 23,1 - \frac{100}{2}\right) + 200 * 12 * 0,035 = 13\,370}$ **€**

Período de Revisão:

Período (meses)	1	3	3,5	3,75	4,0	4,25	4,3
R (política)	180,2	401,1	454,5	481,1	507,6	534,4	539,2
S. Segurança	57,1	78,0	81,4	83,0	84,5	85,9	86,1
P(Ruptura) - %	0,5	1,5	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2
E(Rupturas)	0,035	0,191	0,244	0,273	0,302	0,333	0,339
Custo Total - €	13 369,9	6 890,1	6 675,3	6 623,5	6 598,0	6 596,0	6 598,8

Ou seja, período óptimo de revisão é de 4,25 meses, $\boldsymbol{T^* = 4,25}$ meses. Em termos práticos, podemos considerar que as revisões deveriam ser, aproximadamente, de quatro em quatro meses**.**

17. 2 Modelo $\langle \boldsymbol{R};\ \boldsymbol{T}\rangle$ com Vendas Diferidas e Custo de Ruptura Fixo

Neste caso, o custo de ruptura é independente do número de unidades diferidas. A metodologia é semelhante à desenvolvida nos modelos de ponto de encomenda. A expressão do custo total será agora dada por

$$\boldsymbol{CT(R,T) = \frac{K}{T} + IC\left[R - \mu - \frac{TD}{2}\right] + p\frac{1}{T}\int_R^{\infty} f(x_{L+T})dx_{L+T}} \qquad (3.126)$$

Igualmente, para $\boldsymbol{T}$ dado, o valor de $\boldsymbol{R}$ deve verificar a condição de estacionariedade

$$\boldsymbol{\frac{\partial CT(R,T)}{\partial R} = IC - \frac{p}{T}f(R) = 0}$$

$$\boldsymbol{f(R^*) = \frac{ICT}{p}} \qquad (3.127)$$

Nota. Quando o prazo de reaprovisionamento é uma variável aleatória, $\boldsymbol{f(x_{L+T})}$ é substituída por $\boldsymbol{\hat{h}\left(x_{L_2+T}\right)}$.

Exemplo 33. Considere-se o exemplo anterior em que o custo de ruptura é fixo e de montante igual a 1 000 € e o período de revisão é de 4 meses.

$$\boldsymbol{f(R^*) = \frac{0,12 * 100 * 4/12}{1\,000} = 0,004}$$

A utilização da função de densidade da normal no excel permitiu obter $\boldsymbol{R^* = 478}$. A partir daqui podemos obter os restantes indicadores da política de stocks:
Stock de Segurança = $487 - 23{,}1 - 400 = \mathbf{54{,}9}$; P(Ruptura) = $\mathbf{9}\%$; Número Esperado de rupturas = **1,74;**
Custo anual (excluindo c. aquisição) = $\mathbf{1\,000} * \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{4}} + \mathbf{0{,}12} * \mathbf{100} * \left(\mathbf{478 - 23{,}1} - \frac{\mathbf{400}}{\mathbf{2}}\right) + \mathbf{1\,000} * \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{4}} * \mathbf{0{,}09} \approx \mathbf{6\,332\,€}$

17. 3 Modelo $\langle \boldsymbol{R};\ \boldsymbol{T}\rangle$ com Vendas Diferidas e Custos de Ruptura Fixo e Variáveis

Neste caso, os custos de ruptura são novamente de dois tipos: existe um custo que é independente do número de unidades diferidas, $\boldsymbol{p_f}$, e custos variáveis proporcionais ao número de unidades diferidas e cujo unitário é $\boldsymbol{p_v}$. A metodologia é semelhante à desenvolvida nos modelos de ponto de encomenda. A expressão do custo total será agora dada por

$$\boldsymbol{CT(R,T) = \frac{K}{T} + IC\left[R - \mu - \frac{TD}{2}\right] + p_f \frac{1}{T}\int_R^{\infty} f(x_{L+T})dx_{L+T} + p_v \frac{1}{T}\int_R^{\infty}(x_{L+T} - R)f(x_{L+T})dx_{L+T}} \tag{3.128}$$

Igualmente, para $\boldsymbol{T}$ dado, o valor de $\boldsymbol{R}$ deve verificar a condição de estacionariedade

$$\boldsymbol{\frac{\partial CT(R,T)}{\partial R} = IC - \frac{p_f}{T} f(R) - \frac{p_v}{T} H(R,T) = 0}$$

$$\boldsymbol{p_f f(R^*) + p_v H(R^*,T) = ICT} \tag{3.129}$$

Nota 1. Quando o prazo de reaprovisionamento é uma variável aleatória, $\boldsymbol{f(x_{L+T})}$ é substituída por $\boldsymbol{\hat{h}\left(x_{L_2+T}\right)}$.

Nota 2. Quando $\boldsymbol{p_f}$ é muito pequeno comparado com $\boldsymbol{p_v}$, simplifica-se a expressão anterior eliminando $\boldsymbol{p_f}$ e substituindo $\boldsymbol{p_v}$ por $\boldsymbol{p = p_v + p_f}$.

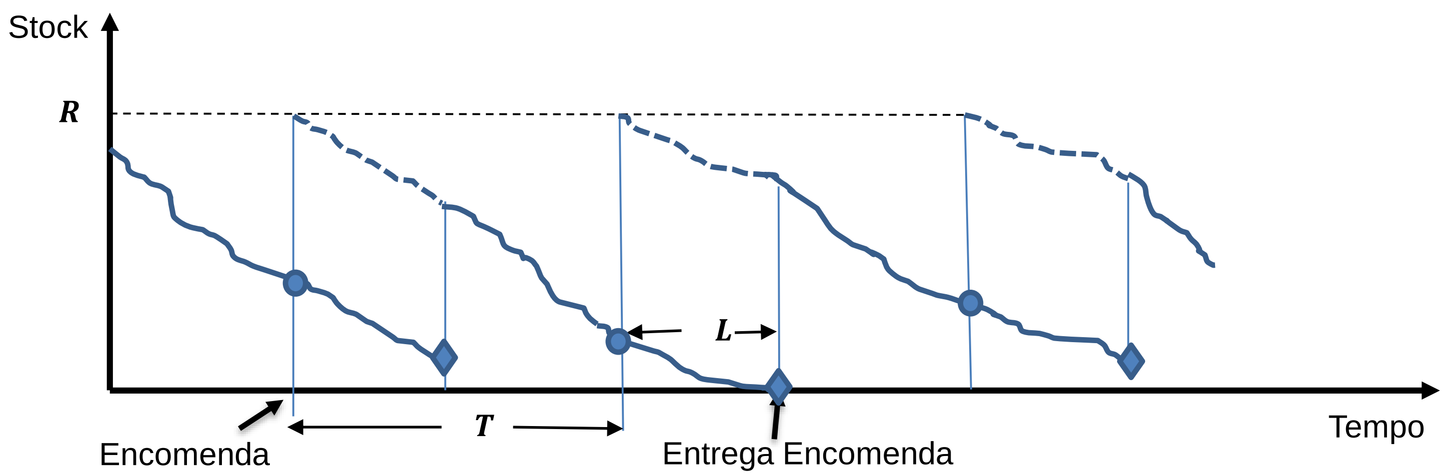
Nota 2. Quando $\boldsymbol{p_v}$ é muito pequeno comparado com $\boldsymbol{p_f}$, a simplificação consiste em eliminar $\boldsymbol{p_v}$ e em substituir $\boldsymbol{p_f}$ por $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_f} + \boldsymbol{p_v}$, em (3.129), o que é equivalente a fazer $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_f} + \boldsymbol{p_v}$ e aplicar (3.127), apresentado em 17.2.

Nota 3. Podemos igualmente concluir que (3.124) e (3.127) são casos particulares do modelo geral (3.129), em que $\boldsymbol{p_f} = \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{p_v} = \boldsymbol{0}$, respectivamente.

17. 4 Modelo $\langle \boldsymbol{R};\ \boldsymbol{T} \rangle$ com Vendas Perdidas e Custos de Ruptura Variáveis

Quando comparado com o modelo de vendas diferidas com custos de ruptura proporcionais, a diferença principal reside no cálculo do stock de segurança, situação que já acontecia nos modelos de ponto de encomenda. Os custos de revisão, de passagem da encomenda e de ruptura têm exactamente as mesmas expressões. Por outro lado, os custos de ruptura incorporam os custos de oportunidade associados aos benefícios não realizados por inexistência da venda.

Graficamente o stock evolui de acordo com o gráfico:



Para calcular o stock médio, obtenha-se primeiro o stock mínimo, que ocorre antes da recepção de uma encomenda. Note-se que agora a quantidade a encomendar é uma variável aleatória, que depende do stock (uma variável aleatória) no momento da revisão. O seu valor médio é $\boldsymbol{TD}$, montante correspondente à procura esperada no ciclo $\boldsymbol{T}$. Designando por $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{L+T}}, \boldsymbol{R})$ o stock mínimo, vem então (ver gráfico):

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{L+T}}, \boldsymbol{R}) = \begin{cases} \boldsymbol{R} - \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{L+T}} & \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{L+T}} < \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{L+T}} \geq \boldsymbol{R} \end{cases}$$

O valor esperado do stock mínimo, que constitui o stock de segurança, é pois

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{L+T}}, \boldsymbol{R})] = \int_0^R (R - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{L+T}}) f(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{L+T}}) \boldsymbol{dx}_{\boldsymbol{L+T}} = \int_0^\infty (R - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{L+T}}) f(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{L+T}}) \boldsymbol{dx}_{\boldsymbol{L+T}} - \int_R^\infty (R - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{L+T}}) f(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{L+T}}) \boldsymbol{dx}_{\boldsymbol{L+T}}$$

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{L+T}}, \boldsymbol{R})] = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{TD} + \int_R^\infty (\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{L+T}} - \boldsymbol{R}) f(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{L+T}}) \boldsymbol{dx}_{\boldsymbol{L+T}} \qquad (3.130)$$

O valor esperado do stock máximo é igual ao do stock mínimo acrescido do valor esperado da encomenda, que é $\boldsymbol{TD}$, como se disse atrás**,** isto é**,**

$$\boldsymbol{R} - \boldsymbol{\mu} + \int_R^\infty (\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{L+T}} - \boldsymbol{R}) f(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{L+T}}) \boldsymbol{dx}_{\boldsymbol{L+T}} \qquad (3.131)$$

vindo então para o stock médio

$$\boldsymbol{R} - \boldsymbol{\mu} - \frac{\boldsymbol{TD}}{\boldsymbol{2}} + \int_R^\infty (\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{L+T}} - \boldsymbol{R}) f(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{L+T}}) \boldsymbol{dx}_{\boldsymbol{L+T}} \qquad (3.132)$$

Como número esperado de rupturas têm uma expressão semelhante à do modelo de vendas diferidas,

$$E[\eta(R,T)] = \int_R^{\infty} (x_{L+T} - R) f(x_{L+T}) dx_{L+T}$$

vem, finalmente, o custo esperado anual, excluindo os custos de aquisição:

$$CT(R,T) = \frac{K}{T} + IC\left[R - \mu - \frac{TD}{2}\right] + (IC + \tfrac{p}{T}) \int_R^{\infty} (x_{L+T} - R) f(x_{L+T}) dx_{L+T} \qquad (3.133)$$

Para T dado, o valor de R deve verificar a condição de estacionariedade

$$\frac{\partial CT(R,T)}{\partial R} = IC + (IC + \tfrac{p}{T})\left[-Rf(R) + Rf(R) - \int_R^{\infty} f(x_{L+T}) dx_{L+T}\right] = 0 \qquad (3.134)$$

sendo, finalmente, o valor óptimo R^* dado pela solução da equação

$$\int_R^{\infty} f(x_{L+T}) dx_{L+T} = H(R,T) = \frac{ICT}{ICT+p} \qquad (3.135)$$

Para determinar o valor óptimo de T procede-se como no modelo de vendas diferidas.

Nota. Quando o prazo de reaprovisionamento é uma variável aleatória, $f(x_{L+T})$ é substituída por $\hat{h}\left(x_{L_2+T}\right)$ e $H(R,T)$ por $\hat{H}(R,T)$, em que $\hat{h}\left(x_{L_2+T}\right) = \int_{\underline{L}}^{\bar{L}} f\left(x_{L_2+T}\right) g(L_2) dL_2$.

Exemplo 34. Suponha os dados do exemplo 29, mas em que a empresa, para maior simplicidade administrativa, encara mudar para um sistema de calendário com revisões trimestrais, que custam 300 $ cada uma. Pretende conhecer-se a política neste caso e compará-la com a politica adoptada no sistema de ponto de encomenda.

Relembremos os dados do problema:
$\boldsymbol{D = 10\,000}$ unidades; $\boldsymbol{T = \frac{3}{12} = 0,25}$ anos; $\boldsymbol{L = \frac{0,5}{12}} = 0{,}042$ anos; $\boldsymbol{C = 50 + 5 + 0,02 * 50 + 1 + 0,5 = 57,5}\ \$$; $\boldsymbol{I = 0,15}$; $\boldsymbol{IC = 0,15 * 57,5 = 8,625}\ \$$; $\boldsymbol{p = 66 - 57,5 + 1 = 9,5}\ \$$; $\boldsymbol{A = 500 + 600 = 1\,100}$; $\boldsymbol{J = 300\ \$}$; $\boldsymbol{E(X) = \mu = \frac{0,5}{12} * 10\,000 = 416,7}$; $\boldsymbol{\sigma = 900\sqrt{\frac{0,5}{12}} = 183,71}$; $\boldsymbol{E(X_{L+T}) = \mu_{L+T} = 2\,916,7}$; $\boldsymbol{\sigma_{L+T} = \sqrt{V(X_{L+T})} = 486,1}$; $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{X_{L+T}}$ são variáveis aleatórias normais.

Aplicando o modelo, tem-se

$\boldsymbol{H(R^*, T) = \frac{ICT}{ICT+p} = \frac{8,625*0,25}{8,625*0,25+9,5} = 0,185}$; $\boldsymbol{R^* = 3\,352,4}$; $\boldsymbol{E[\eta(X_{L+T}, R)] = 48,8}$; **S.Segurança**$\boldsymbol{= 484,6}$

$$\boldsymbol{CT(3\,352; 0,25) = \frac{1\,100+300}{0,25} + 8,625 * \left[3\,352 - 416,7 - \frac{2500}{2}\right] + \left(8,625 + \frac{9,5}{0,25}\right) * 48,8 \approx 22\,415}\ \$$$

Se se retirar os custos de revisão, que representam **1 200 $,** o valor **21 215 $** (22 415-1 200) compara com **18 122 $.** No entanto, deve notar-se que o período de revisão, $\boldsymbol{T}$, não está optimizado, aspecto que não altera a conclusão geral de que em condições *ceteris paribus* o modelo de ponto de encomenda apresenta custos totais mais baixos. É o que vamos ilustrar optimizando o período de revisão. Através de simulação numérica, verifica-se que o período de revisão deverá ser cerca de 2 meses, quando se consideram os custos de revisão, e de cerca de 1,8 meses quando estes custos não são considerados, o que em termos práticos significa um ciclo de 2 meses. Apresenta-se de seguida uma tabela com os principais resultados.

Resultados da Simulação:

Período (meses)	1	1,5	1,8	2,0	2,1	2,2	2,5
R (Política)	1 719	2 134	2 380	2 543	2 625	2 706	2 949
S. Segurança	478,8	484,7	486,3	487,0	487.4	487,1	486,8
P(Ruptura) -%	7,0	10,2	12,0	13,1	13,7	14,3	15,9
E (Rupturas)	9,98	17,82	23,03	27,63	29,32	31,07	37,49
Custo c/Revisão - $	25 661	22 126	21 454	21 332	21 342	21 354	21 612
Custo s/Revisão - $	22 061	19 726	19 454	19 568	19 628	19718	20 172

17. 5 Modelo $\langle R;\ T\rangle$ com Vendas Perdidas e Custos de Ruptura Fixo e Variáveis

Também neste caso, a abordagem é semelhante à feita no modelo de vendas diferidas, apenas com a particularidade de o custo de ruptura variável incluir o benefício não realizado com a perda da venda. A expressão do custo total será agora dada por

$$CT(R,T) = \frac{K}{T} + IC\left[R - \mu - \frac{TD}{2} + \int_R^{\infty}(R - x_{L+T})f(x_{L+T})dx_{L+T}\right] + \frac{p_f}{T}\int_R^{\infty} f(x_{L+T})dx_{L+T} + \frac{p_v}{T}\int_R^{\infty}(R - x_{L+T})f(x_{L+T})dx_{L+T}$$

ou, de forma mais simplificada,

$$\boldsymbol{CT}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{T}) = \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{IC}\left[\boldsymbol{R} - \boldsymbol{\mu} - \frac{\boldsymbol{TD}}{2}\right] + \frac{\boldsymbol{p_f}}{\boldsymbol{T}} \int_{\boldsymbol{R}}^{\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_{L+T}})\boldsymbol{dx_{L+T}} + \left(\boldsymbol{IC} + \frac{\boldsymbol{p_v}}{\boldsymbol{T}}\right) \int_{\boldsymbol{R}}^{\infty} (R - \boldsymbol{x_{L+T}})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_{L+T}})\boldsymbol{dx_{L+T}} \qquad (3.136)$$

Igualmente, para $\boldsymbol{T}$ dado, o valor de $\boldsymbol{R}$ deve verificar a condição de estacionariedade

$$\frac{\partial \boldsymbol{CT}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{T})}{\partial \boldsymbol{R}} = \boldsymbol{IC} - \left(\boldsymbol{IC} + \frac{\boldsymbol{p_v}}{\boldsymbol{T}}\right)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}) - \frac{\boldsymbol{p_f}}{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{R}^*) = \frac{(\boldsymbol{ICT}+\boldsymbol{p_v})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}^*) - \boldsymbol{p_v}}{\boldsymbol{p_f}} \qquad (3.137)$$

em que $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{1} - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ é a função de distribuição da variável aleatória $\boldsymbol{X_{L+T}}$.

Nota 1. Novamente, quando $\boldsymbol{p_f}$ é muito pequeno comparado com $\boldsymbol{p_v}$, simplifica-se eliminando $\boldsymbol{p_f}$ e substituindo $\boldsymbol{p_v}$ por $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_f} + \boldsymbol{p_v}$, vindo como solução a raiz da expressão de (3.135).

Nota 2. Quando $\boldsymbol{p_f}$ é muito pequeno comparado com $\boldsymbol{p_v}$, a eliminação de $\boldsymbol{p_v}$ e a substituição de $\boldsymbol{p_f}$ por $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_f} + \boldsymbol{p_v}$ conduz à expressão

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{R}^*) = \frac{\boldsymbol{ICT}}{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}^*) \qquad \text{para } \boldsymbol{T} \text{ fixado} \qquad (3.137a)$$

Nota. 3 No modelo de vendas perdidas existe sempre um custo de ruptura variável, correspondente ao benefício não realizado, pode é ser pequeno, justificando assim a simplificação.

Nota 4. Quando o prazo de reaprovisionamento é uma variável aleatória, $\boldsymbol{f(x_{L+T})}$ é substituída por $\boldsymbol{\hat{h}(x_{L_2+T})}$ e $\boldsymbol{H(R,T)}$ por $\boldsymbol{\hat{H}(R,T)}$**,** em que $\boldsymbol{\hat{h}(x_{L_2+T}) = \int_{\underline{L}}^{\overline{L}} f(x_{L_2+T})g(L_2)dL_2}$**.**

Exemplo 35. considere-se o exemplo anterior, em que para além do custo de ruptura proporcional de **9,5 $**, existe um custo de ruptura fixo, correspondente a uma penalidade por falha, de **3 000 $.**

Apesar da dificuldade numérica em lidar com números muito pequenos, encontra-se um valor para o nível da política $\boldsymbol{R^* = 3\ 540}$, a partir do qual podemos determinar as restantes componentes da política de stocks. Assim:

Nível da política = **3540**; Stock Segurança = **646,4**; Probabilidade ruptura = **10%**; Número esperado de rupturas por ciclo = **23,1**; Custo anual médio = **24 032 $.**

17.5 Modelo $\langle \boldsymbol{R};\ \boldsymbol{T} \rangle$ com Nível de Serviço

Tal como nos modelos de ponto de encomenda, quando o custo de ruptura é desconhecido, podemos utilizar medidas de performance para orientar a escolha das políticas de stocks. São igualmente designadas por *Medidas do Nível de Serviço.* Claro que a dificuldade em estabelecer um custo de ruptura pode existir, mas a solução para contornar esta dificuldade apenas na aparência a contorna, pois no fundo estabelecer uma medida de performance acaba por ser equivalente a considerar, embora de forma implícita, um custo de ruptura, mas não há dúvida que pode ser mais fácil pela maior sensibilidade que um gestor, nomeadamente de stocks, possa ter a certos indicadores de gestão.

Continuaremos a utilizar as mesmas medidas que nos modelos de ponto de encomenda, isto é,

1. **Medida 1 para o Nível de Serviço, com o acrónimo do inglês *SLM1***
2. **Medida 2 para o Nível de Serviço, com o acrónimo do inglês *SLM2***

1. **Medida *SLM1***

Esta medida estabelece uma proporção (ou percentagem) para a procura esperada que é anualmente satisfeita, isto é

$$\boldsymbol{SLM1 = 1 - \frac{E[\eta(R,T)]\frac{1}{T}}{D} = \alpha_1} \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{E[\eta(R,T)] = (1-\alpha_1)TD} \tag{3.138}$$

para $\boldsymbol{T}$ dado. Depois de fixado o valor $\boldsymbol{\alpha_1}$ para o nível de serviço ***SLM1*****,** obtém- se o valor de $\boldsymbol{R}$, que caracteriza a política e partir do qual podemos obter a restante informação de gestão: stock de segurança e probabilidade de ruptura.

2. **Medida *SLM2***

Com esta medida estabelece-se um valor para o número esperado de ciclos durante o ano em que ocorre ruptura. Seja $\boldsymbol{\alpha_2}$ esse valor. Então

$$\boldsymbol{SLM2 = P(X_{L+T} > R)\frac{1}{T} = \alpha_2} \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{P(X_{L+T} > R) = \alpha_2 T} \tag{3.139}$$

Depois de fixado $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{\alpha_2}$ para a medida ***SLM2***, obtém- se o valor de $\boldsymbol{R}$. No restante procede-se como na medida anterior.

Exemplo 36. No exemplo 32 suponha-se que o custo de ruptura é desconhecido e que a empresa estabelece um nível de serviço dado pelo número esperado de ciclos durante o ano em que ocorre ruptura e que esse nível deve ser no máximo **0,5**. Determine a política de aprovisionamento neste caso. Qual é, neste caso, o custo de ruptura implícito?.

Neste caso foi estabelecida uma medida de performance do tipo ***SLM2***. Recordemos os dados do problema

$\boldsymbol{D = 1\,200;\quad K = 1\,000;\quad IC = 12\text{ €}; E(X) = \mu = 23,1;\ E(X_{L+T}) = 123,1\,;\ \ V(X_{L+T}) = 492,16;\quad \sigma_{L+T} = 22,2\,;\ \ L = \frac{1}{52}\ anos;\quad T = \frac{1}{12}\ anos;\ \ SLM2 = \alpha_2 = 0,5.}$ Então:

$\boldsymbol{SLM2 = P(X_{L+T} > R)\frac{12}{1} = 0,5;\qquad P(X_{L+T} > R) = 0,0417;\quad R = 161,5 \approx 162;\ \ S.Segurança = 161,5 - 123,1 = 38,4;}$

$\boldsymbol{E[\eta(162;1/12)] = 22,2 * \emptyset(1,732) + (123,1 - 161,5)H\left(161,5;\ \frac{1}{12}\right) = 22,2 * NL(1,73) = 0,376;}$

Custo de ruptura implícito: $\boldsymbol{p = \frac{ICT}{H(R^*,T)} = \frac{12}{12*0,0417} = 24\text{ €}.}$

Quando comparamos estes resultados comos obtidos no exemplo 32, verifica-se que o nível da política é mais baixo, bem como o stock de segurança, e a probabilidade de ruptura no ciclo é mais elevada. Isto resulta de um custo de ruptura equivalente bastante mais baixo, 24 € versus 200 €.

Exemplo 37. Vejamos o mesmo exercício mas supondo que o sistema é de vendas perdidas e que se pretende um nível de serviço dado pela percentagem esperada da procura que é satisfeita em **99%**. Pretende determinar-se a politica de stocks nestas condições. Assim, com os mesmos dados foi estabelecido $\boldsymbol{SLM1 = \alpha_1 = 0,99}$.

De acordo com (3.128), vem

$$\boldsymbol{E[\eta(R,T)] = (1-\alpha_1)TD = E[\eta(R;1/12)] = 0,01 * \frac{1}{12} * 1\,200 = 1}$$

$$\boldsymbol{E[\eta(R;1/12)] = \sigma_{L+T}NL\left(\frac{R-\mu_{L+T}}{\sigma_{L+T}}\right) = 22,2NL\left(\frac{R-123,1}{22,2}\right) = 1\ ;\quad NL\left(\frac{R-123,1}{22,2}\right) = 0,0451\ ;\quad \frac{R-123,1}{22,2} \approx 1,30; R = 151,9 \approx 152}$$

$$\boldsymbol{S.Segurança = 151,9 - 123,1 + 1 = 29,8;\ \ H\left(152;\frac{1}{12}\right) = 9,7\%;\ \ p(implícito) = \frac{ICT}{H(R^*,T)} - ICT}$$

$$\boldsymbol{= \frac{12}{12 * 0,097} - \frac{12}{12} = 9,31}$$

18. Modelos de Stocks em Futuro Incerto

Embora a incerteza esteja presente nos modelos aleatórios – incerteza probabilizável – quando falamos em futuro incerto estamos a considerar que existe um desconhecimento total ou parcial do comportamento da procura ou do prazo de reaprovisionamento. Claro que na generalidade dos problemas reais raramente se desconhece completamente a natureza do comportamento da ou das variáveis aleatórias. É pouco credível que alguma entidade se dedique à produção ou comercialzação de produtos cuja procura desconhece completamente. Algum conhecimento existe sempre.

No entanto, no sentido de dar alguma coerência teórica ao texto, achamos útil abordar as diversas situações que o decisor defronta relativamente ao grau de incerteza. Já vimos as situações de certeza (caso particular de incerteza nula), quando tratamos os modelos determinísticos, incerteza aleatória, quando tratamos os modelos aleatórios, e agora a incerteza “não aleatória”, em que se conhece parcialmente a procura ou o prazo de reaprovisionamento, mas não o seu comportamento probabilístico. É uma situação que se põe em termos práticos, sobretudo numa fase inicial da gestão de um produto novo. Por isso vamos analisar o processo de decisão racional. Neste capítulo apenas consideramos incerteza na procura do produto, e iremos considerar os modelos de período único e os modelos sequenciais.

18.1 Modelos de Período Único em Futuro Incerto

A situação de maior incerteza passível de ser tratada com alguma racionalidade económica acontece quando apenas se conhece os valores que a procura pode assumir, isto é, os estado da natureza relativamente à procura. Ilustre-se o problema da árvore de Natal através de um exemplo muito simples.

Exemplo 38. Um pequeno comerciante pretende encomendar árvores para vender durante a época de Natal. Apenas sabe que a procura pode assumir os valores de **0** a **5** (assumiu-se uma procura com valores pequenos para não tornar o problema muito pesado sob o ponto de vista dos cálculos, mas em que o essencial é mantido). Cada árvore é vendida por **50** u.m. e custa **20** u.m.. As árvores não vendidas durante o período são vendidas mais tarde a uma padaria a forno de lenha que compra cada árvore por **10** u.m..

O problema consiste em saber quantas árvores o comerciante deve encomendar para vender durante a época natalícia. Por sua vez, o comerciante por cada árvore não vendida atribui uma perda de **5** u.m., correspondente aos produtos acessórios não vendidos e que são utilizados com a árvore, tais com lâmpadas, bonecos, presépios, “flocos de neve”, etc.

Claro que o montante a encomendar varia igualmente entre 0 e 5 árvores. Construa-se a matriz de ganhos associada aos diversos níveis de procura e aos vários montantes de árvores a encomendar.

Procura

Encomenda	0	1	2	3	4	5
0	0	-5	-10	-15	-20	-25
1	-10	30	25	20	15	10
2	-20	20	60	55	50	45
3	-30	10	50	90	85	80
4	-40	0	40	80	120	115
5	-50	-10	30	70	110	150

Trata-se claramente de um problema da Teoria da Decisão, sem dados. Esta teoria preconiza vários critérios de decisão para problemas nestas condições. Um dos critérios utilizados é o critério *Maximin,* em que se procura maximizar os ganhos mínimos. Este critério, quando se utiliza uma matriz de perdas, ou custos, tem como seu equivalente lógico o conhecido critério *Minimax*, ou critério de Wald, e que também é utilizado na Teoria dos Jogos (com um papel central nos jogos de duas pessoas de soma constante).
Nota. Um problema de Teoria da Decisão pode ser entendido como um problema da Teoria dos Jogos, mas em que um dos “jogadores” é a Natureza. No entanto, de um modo geral, na literatura considera-se como um problema da Teoria da Decisão, já que os pressupostos de informação e inteligência racional de um jogador propriamente dito não são os mesmos do “jogador” Natureza.

Se aplicarmos então o critério *Maximin* à matriz de ganhos definida acima, vem

Montante da Encomenda	*Mínimo ganho*	*Maximin*
0	-25	
1	***-10***	***-10***
2	-20	
3	-30	
4	-40	
5	-50	

À luz deste critério, deve apenas encomendar-se uma árvore de Natal. Como se verifica, este critério é um critério pessimista, e esta é uma das principais críticas que lhe é feita enquanto critério de decisão, pois supõe que a Natureza é o mais adversa possível. Repare-se que na Teoria dos Jogos tal crítica não é válida, pois pressupõe-se, nos jogos não cooperativos de informação completa, que ambos os jogadores são inteligentes, igualmente racionais e dispõem da mesma informação, situação que é diferente na teoria da decisão, por um dos oponentes ser a Natureza.

Um outro critério utilizado, em certa medida para tentar obviar o pessimismo do critério *maximin*, é o critério *Pesar Minimax* ou critério de Savage. De acordo com este critério, constrói-se a matriz dos custos de oportunidade ou matriz dos pesares e a seguir aplica-se o critério *minimax*, ou seja minimizar os pesares máximos. Vem então

Procura

Encomenda	0	1	2	3	4	5
0	0	35	70	105	140	175
1	10	0	35	70	105	140
2	20	10	0	35	70	105
3	30	20	10	0	35	70
4	40	30	20	10	0	35
5	50	40	30	20	10	0

Esta matriz constrói-se muito facilmente. Com efeito, para cada estado da natureza escolhe-se a melhor decisão e o respectivo ganho associado. Depois, para cada decisão possível, subtrai-se ao ganho com a melhor decisão o ganho com essa decisão. O valor obtido corresponde ao custo de oportunidade associado a cada decisão, isto é, o que se deixa de ganhar por não ter sido tomada a melhor decisão dado aquele estado da natureza. Assim, se designarmos por $\boldsymbol{a_{ij}}$ os elementos da matriz original de ganhos e por $\boldsymbol{c_{ij}}$ a matriz dos custos de oportunidade, para cada estado da natureza $j,$ verifica-se que

$$\boldsymbol{c_{ij}} = \max_{i} \boldsymbol{a_{ij}} - \boldsymbol{a_{ij}}$$

Calcula-se depois o $\min_{i} \max_{j} \boldsymbol{c_{ij}}$, que no exemplo apresentado é $\boldsymbol{c^{*}_{4,5}} = \mathbf{40}$, isto é, devem ser encomendadas **4** árvores de Natal, decisão diferente da anterior.

Se os custos de ruptura forem pouco significativos, é fácil de verificar que o critério *maximin* na matriz original de ganhos (critério de Wald) privilegia encomendas baixas (excesso de prudência) enquanto o critério *pesar minimax* (Savage) privilegia encomendas elevadas. Esta é uma das críticas e dificuldades nesta abordagem, pois o problema é o mesmo, embora se apresente de forma diferente, mas a decisão é contraditória.

Um outro critério, por vezes utilizado, consiste em atribuir igual probabilidade a todos os estados da natureza e aplicar o critério de *Bayes*, ou seja tomar a decisão com maior ganho esperado. Este critério – do valor esperado – é também conhecido por critério de *Laplace-Bayes*. Neste caso a decisão seria encomendar **4** árvores, a que corresponde um ganho esperado de **52,5** u.m.. Outra forma seria atribuir, ainda que subjectivamente, probabilidades (eventualmente diferentes) aos diversos estados da natureza e aplicar este critério.

Para além destes critérios, os mais usuais, podemos ainda utilizar outos, como por exemplo:

- Escolher a decisão a que corresponde o maior valor da média entre a hipótese pessimista (a natureza é o mais adversa possível) e a hipótese optimista (a natureza "manifesta-se" da melhor forma possível). Este critério é por vezes designado por critério de *Hurwicz* (de L. Hurwicz). Neste caso a decisão seria encomendar **5** árvores de Natal;

- Escolher, ainda que subjectivamente, o estado da natureza que possa ter maior probabilidade e escolher a decisão com maior ganho. Se pensarmos que a procura com maior probabilidade corresponde a 3 árvores, então a decisão consiste em encomendar 3 árvores, a que corresponde um ganho esperado de 90 u.m..

A utilização do critério de *Laplace-Bayes* abre perspectivas importantes, na medida em que transforma um problema de decisão em futuro incerto num problema de decisão em futuro aleatório, já tratado. Permite ainda tratar facilmente casos contínuos e que envolvam montantes elevados na procura, através da distribuição uniforme (igual probabilidade no caso discreto e igual densidade no caso contínuo).

Exemplo 39. Considere-se o exemplo 20, mas em que a procura de quartos se situa entre **2 000** e **4 000**, sem conhecimento da distribuição de probabilidade da procura, mas em que, à falta de melhor, se atribui igual probabilidade aos diversos valores que a procura pode assumir.

Utilizando a informação do exemplo 20 e aplicando a distribuição **Uniforme (2 000; 4 000),** vem

$$\boldsymbol{F(Q^*) = \frac{Q^* - 2\,000}{4\,000 - 2\,000} = \frac{V + p_0 - C}{V + p_0 - l} = \frac{90 - 50}{90 - 15} = 0,533}$$

Ou seja, $\boldsymbol{Q^* = 3\,067}$ quartos, sendo o custo esperado

$$\boldsymbol{E[CT(3\,067)] = 15 * 3\,000 + (50 - 15) * 3\,067 + (90 - 15)\int_{3\,067}^{4000} (x - 3\,067)\frac{dx}{4\,000 - 2\,000} \approx 168\,667}\ \$$$

Nota. A solução é claramente uma solução de um modelo aleatório com uma procura uniforme.

Depois do exposto, verifica-se que nestes casos é difícil falar numa solução óptima, pois a escolha depende do critério utilizado, e é difícil encontrar uma solução consensual. Digamos que depende da atitude do decisor face à incerteza. A consideração de igual probabilidade é muitas vezes assumida quando se conhece mal um fenómeno, a não ser que haja a suspeita de que alguns estado da natureza são mais prováveis do que outros.

Pode, no entanto, acontecer que, embora não conhecendo a distribuição de probabilidade, se tenha alguma informação adicional, nomeadamente de alguns dos seus parâmetros, eventualmente alguns momentos, coeficiente de assimetria ou coeficiente de achatamento. Refira-se que sem o conhecimento da média e da variância não são possíveis grandes avanços, pouco mais se consegue do que o obtido atrás para casos simples, como o referido. No entanto, o conhecimento destes dois parâmetros permite a obtenção de alguns resultados interessantes; é com base nesse conhecimento que complementamos a análise nos modelos de período único e dos modelos sequenciais agora em contexto de futuro incerto.

Embora se possam utilizar algumas desigualdades importantes da Teoria das Probabilidades, em função dos parâmetros conhecidos, nomeadamente a desigualdade Cantelli, Gauss e de Tchebychev, como assumiremos que conhecemos apenas a média e a variância da procura, utilizaremos apenas a desigualdade de Tchebychev e o desenvolvimento em série de Euler-Maclaurin, neste caso para o estabelecer um limite superior ao número esperado de unidades em ruptura, tal como é demonstrado por Starr e Miller. Relembremos a desigualdade de Tchebychev quando se conhece a média e a variância de uma variável aleatória,

- $\boldsymbol{P(|X-\mu| \geq t\sigma) \leq \frac{1}{t^2}}$, também escrita na forma
- $\boldsymbol{P(|X-\mu| < t\sigma) \geq 1-\frac{1}{t^2}}$

A desigualdade de Tchebychev e o desenvolvimento de Euler-Maclaurin permite estabelecer a seguinte desigualdade importante:

- $\boldsymbol{\int_{\mu+\sigma t}^{\infty}(x-\mu-\sigma t)\, f(x)dx \leq \sigma(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}+\cdots)}$

Como os termos a partir do terceiro são em geral pequenos, considera-se, como simplificação, apenas os três primeiros.

18.2 Modelo de Período Único com Custos de Ruptura Variáveis

Suponha-se agora que se existe informação parcial sobre a variável procura, através do conhecimento de alguns dos seus parâmetros. Para facilidade de exposição tratamos apenas o caso contínuo, tanto mais que quando a procura tem valores elevados o seu ajustamento ao contínuo não levanta problemas práticos. Considere-se novamente o modelo geral de período único, em que não existem unidades em stock e sem consideração do custo de encomenda, mantendo as designações dos modelos aleatórios,

$$\boldsymbol{G(Q)} = \begin{cases} \boldsymbol{VX - CQ + l(Q - X)} & \boldsymbol{X \leq Q} \\ \boldsymbol{VQ - CQ - p_v(X - Q)} & \boldsymbol{X > Q} \end{cases}$$

cujo valor esperado, dado por (3.66) no caso contínuo, é

$$\boldsymbol{E[G(Q)] = (V - l)\mu - (C - l)Q - (V + p_v - l)\int_Q^{\infty}(x - Q)\, f(x) dx} \qquad (3.140)$$

A solução óptima é, como sabemos, dada por

$$\boldsymbol{F(Q^*) = \frac{V + p_v - C}{V + p_v - l} = \frac{p - C}{p - l}}$$

mas desconhece-se $\boldsymbol{F(Q^*)}$. Supondo que se conhecem a média $\boldsymbol{\mu}$ e o desvio padrão $\boldsymbol{\sigma}$, faça-se $\boldsymbol{Q = \mu + \sigma t}$. Utilizando a desigualdade de Tchebychev, e aplicando o desenvolvimento em série de Euler-Maclaurin, prova-se (Starr e Miller) que $\boldsymbol{\int_{\mu+\sigma t}^{\infty}(x - \mu - \sigma t)\, f(x) dx \leq \sigma(\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6t^3})}$, vindo então para (3.140)

$$\boldsymbol{E[G(Q)] \geq (V - l)\mu - (C - l)(\mu + \sigma t) - (V + p_v - l)\sigma\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6t^3}\right) = \underline{E[G(Q)]} = \underline{G}} \qquad (3.141)$$

que indica um valor mínimo para o ganho esperado. Maximizando este ganho mínimo em função de $\boldsymbol{t}$**,** vem

$$\frac{d\underline{G}}{dt} = -(C-l)\sigma + (V+p_v-l)\sigma\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}+\frac{1}{2t^4}\right) = 0$$

Ou seja,

$$t^4 - \frac{(V+p_v-l)}{(C-l)}t^2 - \frac{(V+p_v-l)}{(C-l)}t - \frac{(V+p_v-l)}{2(C-l)} = 0 \qquad (3.142)$$

Resolvida esta equação, obtém-se seguidamente o valor de $\boldsymbol{Q}$. Note-se que a solução obtida é uma solução *maximin,* só que em relação às distribuições de probabilidade da procura, pois maximiza o ganho esperado mínimo.

Exemplo 40. considere-se o exemplo 20, mas em que se desconhece a distribuição de probabilidade da procura, mas conhece-se a sua média e o seu desvio padrão. Relembremos os dados do problema:

$$\mathrm{V} = 0;\ \ p_f = 90;\ \ C = 50;\ \ l = 15;\ \mu = 3\,000\ \ ;\sigma = 300$$

Vem então para (3.142)

$$t^4 - \frac{75}{35}t^2 - \frac{75}{35}t - \frac{75}{70} = 0$$

Utilizando o solver, chega-se a uma raiz positiva com $\boldsymbol{t}$ =**1,891 ,** vindo então $\boldsymbol{Q} = \mathbf{3\,567}$, valor que fica bastante acima dos 3 025 obtidos com o conhecimento da distribuição normal com a mesma média e o mesmo desvio padrão (costuma dizer-se que a ignorância paga-se). Com esta solução, verifica-se que $E[CT(Q)] \leq 185\,455\$$, acima, como se esperava, dos 158 980 \$ obtidos com a distribuição normal:

$$E[G(Q)] \geq -15 * 3\,000 - (50-15) * (3\,000 + 300 * 1{,}891) - (90-15) * 300 * \left(\frac{1}{1{,}891} + \frac{1}{2 * 1{,}891^2} + \frac{1}{6 * 1{,}891^3}\right)$$
$$= -185\,455 = \underline{E[G(Q)]} = \underline{G}$$

Nota. $\boldsymbol{E[CT(Q)] = -E[G(Q)] = 185\,455.}$ O modelo poderia ser resolvido minimizando o custo máximo, obtendo-se o mesmo resultado.

Suponhamos agora que a distribuição é simétrica (ver Starr e Miller), vem então

$$\boldsymbol{E[G(Q)] \geq (V-l)\mu - (C-l)(\mu+\sigma t) - (V+p_v-l)\sigma\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}\right) = \underline{E[G(Q)]} = \underline{E}}$$

$$\boldsymbol{\frac{dG}{dt} = -(C-l)\sigma + (V+p_v-l)\sigma\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}+\frac{1}{2t^4}\right) = 0}$$

ou seja,

$$\boldsymbol{t^4 - \frac{(V+p_v-l)}{2(C-l)}t^2 - \frac{(V+p_v-l)}{2(C-l)}t - \frac{(V+p_v-l)}{4(C-l)} = 0} \qquad (3.143)$$

Resolvida esta equação, obtém-se seguidamente o valor de $\boldsymbol{Q}$ resultante desta informação adicional. Retomando o exemplo anterior, verifica-se que obtemos como raiz $\boldsymbol{t = 1{,}440}$**,** daí resultando $\boldsymbol{Q = 3\,432}$, valor mais baixo do que o anterior, resultante da informação adicional quanto à simetria da procura. Com esta solução, verifica-se que $\boldsymbol{E[CT(Q)] \leq 176\,273}$ \$, valor já mais próximo do valor obtido para a normal.

Nesta resolução admitiu-se que a reserva de quartos, $\boldsymbol{Q}$, fica acima da média, visto que $\boldsymbol{F(Q^*) = 0,533}$ valor superior a **0,5**, como se confirmou com a utilização da normal (numa distribuição simétrica, quando o valor da função de distribuição está acima de 50%, o seu argumento é superior à sua média). Mas, claro que esta hipótese depende dos parâmetros utilizados no modelo. Uma regra prática muito intuitiva recomenda que se a relação $\boldsymbol{\frac{p-C}{p-l}}$ tiver um valor elevado próximo de 1, deve considerar-se $\boldsymbol{Q = \mu + \sigma t}$; se, pelo contrário, esta relação tiver um valor baixo, próximo de 0, deve considerar-se $\boldsymbol{Q = \mu - \sigma t}$; quando esta relação estiver próximo de $\boldsymbol{0,5}$ recomenda-se ensaiar as duas hipóteses.

Vejamos o que acontece quando escolhemos a hipótese $\boldsymbol{Q = \mu - \sigma t}$. Novamente de acordo com Starr e Miller, que apresentam a demonstração, neste caso vem para o valor esperado a seguinte desigualdade:

$$\boldsymbol{E[G(Q)] \geq (V-l)\mu - (C-l)(\mu - \sigma t) - 2t\sigma(V+p_v-l) - (V+p_v-l)\sigma\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}\right) = \underline{E[G(Q)]} = \underline{G}}$$
(3.144)

O valor de $\boldsymbol{t}$ que maximiza esta expressão é a raiz da seguinte equação

$$\boldsymbol{t^4 - \frac{(V+p_v-l)}{2(V+p_v-l)-(C-l)}t^2 - \frac{(V+p_v-l)}{2(V+p_v-l)-(C-l)}t - \frac{(V+p_v-l)}{4(V+p_v-l)-2(C-l)} = 0} \tag{3.145}$$

Como a relação $\boldsymbol{\frac{p-C}{p-l} = 0,533}$ está próxima de 50%, calcule-se a política na hipótese de $\boldsymbol{Q = \mu - \sigma t}$ utilizando o mesmo exemplo. Neste caso temos de resolver a equação (3.138) com os parâmetros do modelo, isto é,

$$\boldsymbol{t^4 - \frac{75}{115}t^2 - \frac{75}{115}t - \frac{75}{230} = 0}$$

vindo $\boldsymbol{t} = \mathbf{1,194}$ e $\boldsymbol{Q = 2\,642},$ verificando-se que $\boldsymbol{E[CT(Q)] \leq 191\,305}\ \$,$ acima do valor $\mathbf{185\,455}\ \$$, obtido para a solução $\boldsymbol{Q = 3\,567},$ que nestas condições, à luz do exposto, deve merecer preferência**,** embora a diferença nos custos esperados máximos não seja muito grande (a relação $\boldsymbol{\frac{p-C}{p-l}}$ está próxima de 50%)

18.3 Modelo de Período Único com Custos de Ruptura Fixo e Variáveis

Suponha-se agora o modelo mais geral, mas em que existe um custo de ruptura proporcional e um custo de ruptura independente do número de unidades em falta. Mantendo as designações, o modelo vem então

$$\boldsymbol{G(Q) = \begin{cases} VX - CQ + l(Q-X) & X \leq Q \\ VQ - CQ - p_v(X-Q) - p_f & X > Q \end{cases}}$$

Sendo o respectivo valor esperado dado por

$$E[G(Q)] = (V-l)\mu - (C-l)Q - (V+p_v-l)\int_Q^{\infty}(x-Q)\,f(x)dx - p_f\int_Q^{\infty} f(x)dx \qquad (3.146)$$

Fazendo novamente $Q=\mu+\sigma t$, e sabendo que $\int_{\mu+\sigma t}^{\infty}(x-\mu-\sigma t)\,f(x)dx \le \sigma(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3})$ e $\int_{\mu+\sigma t}^{\infty} f(x)dx \le \frac{1}{t^2}$, vem

$$E[G(Q)] \ge (V-l)\mu - (C-l)(\mu+\sigma t) - (V+p_v-l)\sigma\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}\right) - p_f\frac{1}{t^2} = \underline{G} \qquad (3.147)$$

$$\frac{d\underline{G}}{dt} = -(C-l)\sigma + (V+p_v-l)\sigma\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}+\frac{1}{2t^4}\right) + \frac{2p_f}{t^3} = 0$$

$$t^4 - \frac{(V+p_v-l)}{(C-l)}t^2 - \frac{(V+p_v-l)\sigma+2p_f}{(C-l)\sigma}t - \frac{(V+p_v-l)}{2(C-l)} = 0 \qquad (3.148)$$

cuja solução permite obter o valor de Q.

Exemplo 41. Considere-se o exemplo anterior, mas em que adicionalmente existe um custo fixo de ruptura de **5 000 $.** Esta situação corresponde à do exemplo 20, mas em que se desconhece a distribuição de probabilidade. Relembremos os parâmetros do modelo: $V=0$; $C=50$; $l=15$; $p_v=90$; $\mu=3\,000$; $\sigma=300$; $p_f=5\,000$.

Considerando o valor dos parâmetros em (3.148), a equação a resolver é a seguinte**:**

$$\boldsymbol{t^4 - \frac{75}{35}t^2 - \frac{65}{21}t - \frac{75}{70} = 0}$$

vindo $\boldsymbol{t}$ =**1,992** e $\boldsymbol{Q = 3\ 598.}$ O mínimo do custo máximo esperado é, substituindo em (3.147), **186 781 \$.**

19. Modelos $\langle \boldsymbol{Q};\ \boldsymbol{r}\rangle$ de Ponto de Encomenda em Futuro Incerto

As condições que presidem à análise destes modelos são as mesmas dos modelos aleatórias, excepto o facto de a distribuição de probabilidade da procura ser desconhecida, embora se conheça a sua média e o seu desvio padrão. Tudo o resto se mantém, incluindo as hipóteses simplificadoras utilizadas. A política consiste novamente em determinar $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{r}$.

19. 1 Modelo $\langle \boldsymbol{Q};\ \boldsymbol{r}\rangle$ de Vendas Diferidas e Custos de Ruptura Variáveis

Como vimos nos modelos aleatórios, a expressão do custo esperado anual é dada por

$$\boldsymbol{CT(Q,r) = A\frac{D}{Q} + IC\left[r - \mu + \frac{Q}{2}\right] + p\frac{D}{Q}\int_r^{\infty}(x - r)f(x)dx}$$

Como a distribuição de probabilidade é desconhecida, faz-se $\boldsymbol{r = \mu + \sigma t},$ vindo então

$$\boldsymbol{CT(Q,t) = A\frac{D}{Q} + IC\left[\sigma t + \frac{Q}{2}\right] + p\frac{D}{Q}\int_{\mu+\sigma t}^{\infty}(x - \mu - \sigma t)f(x)dx}$$

Como $\int_{\mu+\sigma t}^{\infty}(x-\mu-\sigma t)f(x)dx \leq \sigma\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}\right)$, vem

$$CT(Q,t) \leq A\frac{D}{Q}+IC\left[\sigma t+\frac{Q}{2}\right]+p\frac{D}{Q}\sigma\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}\right)=\overline{CT} \tag{3.149}$$

em que $\overline{CT}$ representa o custo esperado máximo que se pretende minimizar relativamente a Q e a t.

A forma mais simples, embora aproximada, de resolver este problema consiste em considerar que a quantidade a encomendar, Q, é independente do ponto de encomenda, r, e assumir o Q de Wilson, minimizando o custo máximo, $\overline{CT}$, em ordem a t, vindo

$$\frac{\partial\overline{CT}}{\partial t}=IC\sigma-p\frac{D}{Q}\sigma\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}+\frac{1}{2t^4}\right)=0$$

ou seja,

$$t^4-\frac{pD}{ICQ}t^2-\frac{pD}{ICQ}t-\frac{pD}{2ICQ}=0 \tag{3.150}$$

A obtenção de t permite calcular o ponto de encomenda e em seguida o stock de segurança, bem como $\overline{CT}$, o mínimo do custo máximo esperado, ficando então a política identificada.

Não assumindo a independência entre a quantidade a encomendar e o ponto de encomenda, pois elas de facto não são independentes, temos de resolver o sistema de estacionariedade,

$$\frac{\partial\overline{CT}}{\partial Q}=-\frac{AD}{Q^2}+\frac{IC}{2}-p\frac{D}{Q^2}\sigma\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}\right)=0$$

$$\frac{\partial \overline{CT}}{\partial t} = IC\sigma - p\frac{D}{Q}\sigma\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{2t^4}\right) = 0$$

e resolver em ordem a $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{t}$. Explicitando em $\boldsymbol{Q}$**,** vem

$$Q = \sqrt{\frac{2AD}{IC} + \frac{pD}{IC}\sigma\left(\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{3t^3}\right)}$$

(3.151)

$$Q = \frac{pD}{IC}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{2t^4}\right)$$

A obtenção de $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{t}$ é feita de forma iteractiva e possibilita o estabelecimento da política de stocks.

Exemplo 42. Considere-se o exemplo 26, mas em que se desconhece o comportamento probabilístico da procura. Relembremos os parâmetros do modelo:
$\boldsymbol{D = 10\,000}$ unidades; $\boldsymbol{C = 50 + 5 + 0,02 * 50 + 1 + 0,5 = 57,5}$ \$; $\boldsymbol{I = 0,15}$; $\boldsymbol{IC = 0,15 * 57,5 = 8,625}$; $\boldsymbol{p = 66}$ **\$;**
$\boldsymbol{A = 500 + 600 = 1\,100}$**;** $\boldsymbol{E(X) = \mu = \frac{1}{24} * 10\,000 = 416,7}$; $\boldsymbol{\sigma = 900\sqrt{\frac{1}{24}} = 183,71}$; $\boldsymbol{Q_w = 1\,597}$ unidades.

Considerando que $\boldsymbol{Q}$ é independente de $\boldsymbol{r}$, resolvemos (3.150) com os parâmetros referidos,

$$t^4 - \frac{66*10\,000}{8{,}625*1\,597}t^2 - \frac{66*10\,000}{8{,}625*1\,597}t - \frac{66*10\,000}{2*8{,}625*1\,597} = 0$$

vindo $\boldsymbol{t = 7,40}$, $\boldsymbol{Q = 1\,597, (Q\ de\ Wilson), r = 1\,777, Stock\ de\ Segurança = 1\,360}$ e $\boldsymbol{CT(1\,597, 1\,777) \leq 36\ 484\$}$**.**

Se aplicarmos (3.151), os resultados são: $\boldsymbol{t} = 5{,}69$, vindo $\boldsymbol{Q} = \mathbf{2\,821}$, $\boldsymbol{r} = \mathbf{1\,461}$, $\boldsymbol{Stock\ de\ Segurança} = \mathbf{1\,044}$ e $\boldsymbol{CT}(\mathbf{2\,821}; \mathbf{1\,461}) \leq \mathbf{33\,337}\$$, resultados melhores, pois os custos máximos esperados são inferiores.

Se dispusermos da informação de que a variável aleatória é simétrica, o resultado vem melhorado. Com efeito, obtém-se:
$\boldsymbol{t} = \mathbf{4{,}40}$, vindo $\boldsymbol{Q} = \mathbf{2\,477}$, $\boldsymbol{r} = \mathbf{1\,225}$, $\boldsymbol{Stock\ de\ Segurança} = \mathbf{808{,}2}$ e $\boldsymbol{CT}(\mathbf{2\,477}; \mathbf{1\,225}) \leq \mathbf{28\,337}$, resultados melhores do que os anteriores. Portanto, à medida que dispomos de mais informação, os resultados, como se esperava, vão melhorando.

19. 2 Modelo $\langle \boldsymbol{Q};\ \boldsymbol{r} \rangle$ de Vendas Diferidas e Custo de Ruptura Fixo

Neste caso a expressão do custo médio anual é dada por

$$\boldsymbol{CT}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{IC}\left[\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\mu} + \frac{\boldsymbol{Q}}{2}\right] + \boldsymbol{p}\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} > \boldsymbol{r})$$

Fazendo novamente $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\sigma t}$, vem

$$\boldsymbol{CT}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{IC}\left[\boldsymbol{\sigma t} + \frac{\boldsymbol{Q}}{2}\right] + \boldsymbol{p}\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{\sigma t})$$

Como $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{\sigma t}) \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t}^2}$, então

$$\boldsymbol{CT}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{t}) \leq \boldsymbol{A}\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{IC}\left[\boldsymbol{\sigma t} + \frac{\boldsymbol{Q}}{2}\right] + \boldsymbol{p}\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{Q}}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t}^2} = \overline{\boldsymbol{CT}} \qquad (3.152)$$

sendo

$$\frac{\partial \overline{CT}}{\partial Q} = -\frac{AD}{Q^2} + \frac{IC}{2} - p\frac{D}{Q^2}\frac{1}{t^2} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{CT}}{\partial t} = IC\sigma - 2p\frac{D}{Q}\frac{1}{t^3} = 0$$

vindo

$$Q = \sqrt{\frac{2AD}{IC} + \frac{2pD}{ICt^2}}$$

(3.153)

$$t = \sqrt[3]{\frac{2pD}{IC\sigma Q}}$$

Também aqui podemos assumir para $\boldsymbol{Q}$ o valor de Wilson e, partir daí, determinar $\boldsymbol{t}$, ou, em alternativa, resolver o sistema (3.153).

Exemplo 43. Considerem-se os dados do exemplo 28, excepto o comportamento probabilístico da procura, que é desconhecido. Relembremos os dados do problema:
$\boldsymbol{D = 10\,000}$ unidades; $\boldsymbol{C = 57,5}$ \$; $\boldsymbol{I = 0,15}$; $\boldsymbol{IC = 8,625}$; $\boldsymbol{p = 1\,000}$ \$; $\boldsymbol{A = 1\,100}$; $\boldsymbol{E(X) = \mu = 416,7}$; $\boldsymbol{\sigma = 183,71}$.

Se considerarmos o $\boldsymbol{Q}$ de Wilson, vem $\boldsymbol{t = 1,992}$, $\boldsymbol{r = 783}$, $\boldsymbol{Stock\ de\ Segurança = 365,9}$ e $\boldsymbol{CT(1\,597, 783\,) \leq 18\,509}$ \$.

Se considerar $\boldsymbol{Q}$ dependente de $\boldsymbol{t}$ e resolvermos (3.153), vem: $\boldsymbol{Q = 1\,783}$; $\boldsymbol{t = 1,92}$; $\boldsymbol{r = 769}$; $\mathbf{Stock\ de\ segurança = 352,7}$ e $\boldsymbol{CT(1\,783, 769\,) \leq 18\,422}$ \$, valores bastante próximos dos anteriores. Uma informação adicional sobre a simetria da procura permitia ainda baixar o mínimo do custo máximo esperado.

19. 3 Modelo $\langle Q;\ r\rangle$ de Vendas Diferidas e Custos de Ruptura Fixo e Variáveis

Neste caso a expressão do custo médio anual é dada por

$$CT(Q,r) = A\frac{D}{Q} + IC\left[r-\mu+\frac{Q}{2}\right] + p_v\frac{D}{Q}\int_r^{\infty}(x-r)f(x)dx + p_f\frac{D}{Q}P(X>r)$$

Fazendo novamente $r=\mu+\sigma t$, vem

$$CT(Q,t) = A\frac{D}{Q} + IC\left[\sigma t+\frac{Q}{2}\right] + p_v\frac{D}{Q}\int_{\mu+\sigma t}^{\infty}(x-\mu-\sigma t)f(x)dx + p_f\frac{D}{Q}P(X-\mu>\sigma t)$$

Como $\int_{\mu+\sigma t}^{\infty}(x-\mu-\sigma t)f(x)dx \le \sigma\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}\right)$ e $P(X-\mu>\sigma t)\le\frac{1}{t^2}$, vem então

$$CT(Q,t) \le A\frac{D}{Q} + IC\left[\sigma t+\frac{Q}{2}\right] + p_v\frac{D}{Q}\sigma\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}\right) + p_f\frac{D}{Q}\frac{1}{t^2} = \overline{CT} \qquad (3.154)$$

sendo

$$\frac{\partial\overline{CT}}{\partial Q} = -\frac{AD}{Q^2}+\frac{IC}{2}-p_v\frac{D}{Q^2}\sigma\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}\right)-p_f\frac{D}{Q^2}\frac{1}{t^2}=0$$

$$\frac{\partial\overline{CT}}{\partial t} = IC\sigma-p_v\frac{D}{Q}\sigma\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}+\frac{1}{2t^4}\right)-2p_f\frac{D}{Qt^3}=0$$

Resolvendo em ordem a $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{t}$ e explicitando em Q, vem

$$\boldsymbol{Q} = \sqrt{\frac{2AD}{IC} + \frac{p_v D\sigma}{IC}\left(\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{3t^3}\right) + 2\frac{p_f D}{ICt^2}}$$

(3.155)

$$\boldsymbol{Q} = \frac{p_v D}{IC}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{2t^4}\right) + 2\frac{p_f D}{\sigma ICt^3}$$

De igual modo a obtenção de $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{t}$ é feita de forma iteractiva e possibilita o estabelecimento da política de stocks, isto é, conhecer $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{r}$ e o stock de segurança. Para uma abordagem mais simples, como já se disse, pode novamente utilizar-se o $\boldsymbol{Q}$ de Wilson, e calcular o $\boldsymbol{t}$ a partir da segunda equação de (3.155).

Exemplo 44. considere-se um sistema de ponto de encomenda, com procura com média e desvio padrão no prazo de reaprovisionamento conhecidos, com $\boldsymbol{\mu = 50}$ e $\boldsymbol{\sigma = 10}$, sendo os restantes parâmetros os seguintes: $\boldsymbol{A = 1\,000}$€, $\boldsymbol{D = 1\,800}$, $\boldsymbol{IC = 10}$**€,** $\boldsymbol{p_v = 20}$, $\boldsymbol{p_f = 500}$.

A resolução pelo solver indica $\boldsymbol{Q^* \approx 629}$ e $\boldsymbol{t^* \approx 3,06}$, vindo então um ponto de encomenda $\boldsymbol{r^* \approx 50 + 3,06 * 10 \approx 81}$. Como o modelo é de vendas diferidas o stock de segurança é $\boldsymbol{s^* \approx 30,6}$. se utilizássemos o $\boldsymbol{Q}$ de Wilson obtínhamos valores muito semelhantes para o ponto de encomenda e para o stock de segurança. Os valores neste caso são os seguintes: $\boldsymbol{Q^* = 600, t^* = 3,1}$, $\boldsymbol{r^* = 81}$ e $\boldsymbol{s^* = 31}$, sendo a sua obtenção um pouco mais simples.

Se assumíssemos que o comportamento da procura era normal, e continuando a utilizar o $\boldsymbol{Q}$ de Wilson, a aplicação da segunda expressão de (3.155) permite obter um ponto de encomenda de $\boldsymbol{r = 69,7 \approx 70}$ e um stock de segurança de $= \boldsymbol{s = 19,7}$, valores mais baixos, como se esperava.

Nota. As simplificações já referidas nos modelos aleatórios, quando $\boldsymbol{p_f}$ é muito pequeno comparado com $\boldsymbol{p_v}$ e vice-versa, podem também fazer-se nestes modelos, fazendo $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p_v} + \boldsymbol{p_f}$ e aplicando, respectivamente, (3.151) e (3.153), que são casos particulares de (3.155), quando $\boldsymbol{p_f} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{p_v} = \mathbf{0}$, respectivamente.

Faça-se esta simplificação considerando apenas o custo fixo, somando-lhe, no entanto, o custo variável $\boldsymbol{p_v} = \mathbf{20}$. Tem-se então $\boldsymbol{p} = \mathbf{520}$. Aplique-se (3.153), isto é, $\boldsymbol{t} = \sqrt[3]{\frac{2pD}{IC\sigma Q}}$ e assumindo o $\boldsymbol{Q}$ de Wilson, $\boldsymbol{Q}^* = \mathbf{600}$. A obtenção da raiz cúbica anterior indica $\boldsymbol{t}^* = \mathbf{3,15}$, o que dá um ponto de encomenda $\boldsymbol{r}^* = \mathbf{81,5} \approx \mathbf{82}$ e um stock de segurança $\boldsymbol{s}^* \approx \mathbf{31,5}$,
valores praticamente semelhantes aos obtidos atrás sem esta simplificação.

19. 4 Modelo $\langle \boldsymbol{Q};\ \boldsymbol{r} \rangle$ com Vendas Perdidas e Custos de Ruptura Variáveis

Neste modelo, a expressão dos custos anuais, como sabemos de (3.107) dos modelos aleatórios, é dada por

$$CT(Q,r) = A\frac{D}{Q} + IC\left[r - \mu + \frac{Q}{2}\right] + \left(IC + p\frac{D}{Q}\right)\int_r^{\infty}(x - r)f(x)dx$$

Seguindo o mesmo procedimento, fazendo $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\sigma t}$, vem

$$CT(Q,t) = A\frac{D}{Q} + IC\left[\sigma t + \frac{Q}{2}\right] + \left(IC + p\frac{D}{Q}\right)\int_{\mu+\sigma t}^{\infty}(x - \mu - \sigma t)f(x)dx$$

au seja,

$$CT(Q,t) \le A\frac{D}{Q} + IC\left[\sigma t + \frac{Q}{2}\right] + \left(IC + p\frac{D}{Q}\right)\sigma\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6t^3}\right) = \overline{CT} \qquad (3.156)$$

Mais uma vez, podemos assumir o $\boldsymbol{Q}$ de Wilson e optimizar em $\boldsymbol{t}$, isto é, com

$$\frac{\partial \overline{CT}}{\partial t} = IC\sigma - (IC + p\frac{D}{Q})\sigma\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{2t^4}\right) = 0$$

vindo

$$t^4 - (1 + \frac{pD}{ICQ})t^2 - (1 + \frac{pD}{ICQ})t - (1 + \frac{pD}{ICQ})\frac{1}{2} = 0 \qquad (3.157)$$

ou então, tal como fizemos atrás, resolver em ordem a Q e a t o sistema de estacionariedade a seguir:

$$\frac{\partial \overline{CT}}{\partial Q} = -\frac{AD}{Q^2} + \frac{IC}{2} - p\frac{D}{Q^2}\sigma\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6t^3}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \overline{CT}}{\partial t} = IC\sigma - (IC + p\frac{D}{Q})\sigma\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{2t^4}\right) = 0$$

ou,

$$Q = \sqrt{\frac{2AD}{IC} + \frac{pD}{IC}\sigma(\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{3t^3})}$$

(3.158)

$$Q = \frac{pD}{IC}\frac{\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{2t^4}\right)}{\left[1 - \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{2t^4}\right)\right]}$$

Exemplo 45. Considere-se o exemplo 29, mas em que se desconhece o comportamento probabilístico da procura. Relembremos os parâmetros do modelo e consideremos numa primeira abordagem a utilização do $\boldsymbol{Q}$ de Wilson.

$\boldsymbol{D = 10\,000}$; $\boldsymbol{C = 57,5}$ \$; $\boldsymbol{I = 0,15}$; $\boldsymbol{IC = 8,625}$; $\boldsymbol{p = 9,5}$ \$; $\boldsymbol{A = 1\,100}$; $\boldsymbol{E(X) = \mu = 416,7}$; $\boldsymbol{\sigma = 183,71}$; $\boldsymbol{Q_w = 1\,597}$

Neste caso vem $\boldsymbol{t}$ =**2,108** e $\boldsymbol{r = 804}$. Como no modelo de vendas perdidas o stock de segurança depende do número de unidades perdidas por ciclo, sendo igual ao ponto de encomenda menos a procura média durante o prazo de reaprovisionamento, acrescido do número de unidades perdidas por ciclo, e estas são desconhecidas, tomamos o seu majorante por ciclo já utilizado para determinar o limite superior dos custos esperados, e que é dado pela expressão $\int_r^\infty \boldsymbol{(x-r)f(x)dx \leq \sigma\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}\right)}$, vindo então o limite superior do Stock de segurança igual a $\boldsymbol{s = 498,3}$, que pode ser assumido como o stock de segurança, embora seja um limite superior. Finalmente, $\boldsymbol{CT(1\,597;\ 804) \leq 24\,682}$ \$.

A optimização da quantidade a encomendar, através da resolução de (3.158), dá os seguintes resultados :
$\boldsymbol{t = 2,984}$; $\boldsymbol{Q = 2\,040}$; $\boldsymbol{r = 965}$; $\textbf{Stock Segurança} = \boldsymbol{621,2}$; $\boldsymbol{CT(2\,040; 965) \leq 23\,5788}$ \$.

19. 5 Modelo $\langle \boldsymbol{Q};\ \boldsymbol{r}\rangle$ de Vendas Perdidas e Custos de Ruptura Fixos e Variáveis

Tal como já foi referido nos modelos aleatórios, o modelo de vendas perdidas tem sempre uma componente do custo de ruptura que é proporcional, que é o benefício não realizado decorrente da perda da venda. Por isso, no modelo de vendas perdidas existe sempre uma componente variável do custo de ruptura, pode é ser relativamente pequena no contexto dos custo de ruptura; é por essa razão que não consideramos separadamente o cenário de apenas haver um custo fixo, apenas o faremos, como simplificação, quando a componente variável for muito pequena.

Mantendo as designações, já sabemos dos modelos aleatórios, de acordo com (3.107), que a expressão do custo esperado no caso de vendas perdidas é dada por

$$CT(Q,r) = A\frac{D}{Q} + IC\left[r-\mu+\frac{Q}{2}\right] + p_f\frac{D}{Q}\int_r^{\infty} f(x)dx + \left(IC + p_v\frac{D}{Q}\right)\int_r^{\infty}(x-r)f(x)dx$$

O desconhecimento de $f(x)$ leva-nos a fazer $r-\mu=\sigma t$ e a considerar novamente

$\int_r^{\infty} f(x)dx = P(X-\mu > r-\mu) \leq 1/t^2$ e $\int_{\mu+\sigma t}^{\infty}(x-\mu-\sigma t)f(x)dx \leq \sigma(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3})$, daí resultando

$$CT(Q,t) \leq A\frac{D}{Q} + IC\left[\sigma t+\frac{Q}{2}\right] + p_f\frac{D}{Q}\frac{1}{t^2} + \left(IC+p_v\frac{D}{Q}\right)\sigma\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}\right) = \overline{CT} \qquad (3.159)$$

Então

$$\frac{\partial\overline{CT}}{\partial Q} = -\frac{AD}{Q^2} + \frac{IC}{2} - p_f\frac{D}{Q^2}\frac{1}{t^2} - p_v\frac{D}{Q^2}\sigma\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}\right) = 0$$

$$\frac{\partial\overline{CT}}{\partial t} = IC\sigma - 2p_f\frac{D}{Qt^3} - \left(IC+p_v\frac{D}{Q}\right)\sigma\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}+\frac{1}{2t^4}\right) = 0$$

ou

$$Q = \sqrt{\frac{2AD}{IC} + \frac{D[6p_v\sigma t^2 + (6p_f+3p_v\sigma)t + p_v\sigma]}{3ICt^3}}$$

(3.160)

$$Q = \frac{D[2p_v\sigma t^2 + (4p_f+2p_v\sigma)t + p_v\sigma]}{IC\sigma\,(2t^4-2t^2-2t-1)}$$

Exemplo 46. Considere-se o exemplo 30, mas em que se desconhece o comportamento probabilístico da procura. Ou seja, com a seguinte informação:

$\boldsymbol{C = 57,5}\ \$;\ \ \boldsymbol{I = 0,15};\ \ \boldsymbol{IC = 8,625};\ \boldsymbol{;}\ \ \boldsymbol{A = 1\,100;}\ \ \boldsymbol{E(X) = \mu = 416,7};\ \boldsymbol{\sigma = 183,71};\ \boldsymbol{p_f = 1\,000}\ \$;\ \boldsymbol{p_v = 9,5.}$

Considerando o $\boldsymbol{Q}$ de Wilson, obtêm-se os seguintes resultados: $\boldsymbol{Q = 1\,597}; \boldsymbol{r = 830}; \boldsymbol{t = 2,249}$; $\textbf{Stock Segurança} = \boldsymbol{515,7}$ e $\boldsymbol{CT(1\,597; 830\,) \leq 25\,560}\ \$$. Optimizando o $\boldsymbol{Q}$ através de (3.160), obtém-se: $\boldsymbol{Q = 2\,057}; \boldsymbol{r = 1\,012}; \boldsymbol{t = 3,242}$; $\textbf{Stock Segurança} = \boldsymbol{661,2}$ e $\boldsymbol{CT(2\,057; 1\,012\,) \leq 23\,452}\$$.

Nota. As simplificações já referidas podem igualmente ser feitas aqui. Assim, quando $\boldsymbol{p_f}$ é muito pequeno quando comparado com $\boldsymbol{p_v}$ subsitui-se em (3.160) $\boldsymbol{p_v}$ por $\boldsymbol{p = p_v + p_f}$ e faz-se $\boldsymbol{p_f} = 0$; quando $\boldsymbol{p_v}$ é muito pequeno quando comparado com $\boldsymbol{p_f}$, substitui-se este por $\boldsymbol{p = p_v + p_f}$ e faz-se $\boldsymbol{p_v = 0}$.

.

19. 6 Modelo $\langle \boldsymbol{Q};\ \boldsymbol{r} \rangle$ com Nível de Serviço

O desconhecimento do custo de ruptura leva a que se estabeleçam medias de performance para o sistema de stocks, como já vimos. Também aqui podemos determinar a política, mesmo desconhecendo o comportamento probabilístico da procura, mas conhecendo a sua média e a sua variância. Mais uma vez consideramos apenas as duas medidas do nível de serviço já referidas a propósito dos modelos aleatórios, a ***MLS****1* e a ***MLS2***. Como já se disse, esta abordagem visa apenas determinar o ponto de encomenda, já que a quantidade da encomenda é dada pelo $\boldsymbol{Q}$ de Wilson. Tal como nos modelos aleatórios, o ponto de encomenda é calculado da mesma forma para o modelo de vendas diferidas e de vendas perdidas.

1. **Medida *SLM1***

Como se disse, esta medida estabelece uma percentagem para a procura espera que é anualmente satisfeita, isto é

$$\boldsymbol{SLM1 = 1 - \frac{E[\eta(X,r)]\frac{D}{Q}}{D} = \alpha_1 = 1 - \frac{E[\eta(X,r)]}{Q}} \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{E[\eta(X,r)] = (1-\alpha_1)Q}$$

Como $\boldsymbol{Q}$ é desconhecido, considera-se o $\boldsymbol{Q}$ de Wilson. No entanto, como a distribuição de probabilidade é desconhecida, fazendo $\boldsymbol{r = \mu + \sigma t}$ e aplicando a desigualdade já referida, vem então

$$\boldsymbol{E[\eta(X,r)] = \int_r^{\infty}(x-r)\,f(x)dx = \int_{\mu+\sigma t}^{\infty}(x-\mu-\sigma t)\,f(x)dx = (1-\alpha_1)Q \le \sigma(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3})}$$

o que permite determinar $\boldsymbol{t}$ resolvendo a seguinte equação

$$\boldsymbol{\sigma\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}\right) = (1-\alpha_1)Q}$$

ou

$$\boldsymbol{t^3 - \frac{\sigma}{(1-\alpha_1)Q}t^2 - \frac{\sigma}{2(1-\alpha_1)Q}t - \frac{\sigma}{6(1-\alpha_1)Q} = 0} \tag{3.161}$$

Depois de fixado o valor de $\boldsymbol{SLM1 = \alpha_1}$, obtém- se o valor de $\boldsymbol{t}$, e seguidamente de $\boldsymbol{r}$. Os valores obtidos para $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{r}$ caracterizam a política e a partir deles podemos obter o stock de segurança. Se o sistema for de vendas diferidas, o stock de segurança será $\boldsymbol{r-\mu}$; se for de vendas perdidas, será $\boldsymbol{r-\mu+\sigma\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}\right)}$, indicando neste caso um valor máximo para o valor esperado do stock mínimo, ou stock de segurança.

2. Medida *SLM2*

Com esta medida estabelece-se um valor para o número esperado de ciclos durante o ano em que ocorre ruptura. Seja $\boldsymbol{\alpha_2}$ esse valor. Então

$$\boldsymbol{SLM2 = P(X > r)\frac{D}{Q} = \alpha_2} \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{P(X > r) = \alpha_2 \frac{Q}{D}}$$

Igualmente utilizamos o $\boldsymbol{Q}$ de Wilson, fazemos $\boldsymbol{r = \mu + \sigma t}$ e aplicamos directamente a desigualdade de Tchebychev, vindo

$$\boldsymbol{P(X > r) = P(X - \mu > r - \mu) = \alpha_2 \frac{Q}{D} \leq \frac{1}{t^2}}$$

sendo o valor de $\boldsymbol{t}$ obtido através da relação

$$\boldsymbol{t = \sqrt{\frac{D}{\alpha_2 Q}}} \qquad (3.162)$$

Depois de obtido o $\boldsymbol{t}$, obtém-se $\boldsymbol{r}$, ficando a política determinada.

Exemplo 47. Considere-se o exemplo 31, em que face ao desconhecimento dos custos de ruptura se estabeleceram $\boldsymbol{SLM1 = 98\%}$ e $\boldsymbol{SLM2 = 0,5}$.
O sistema é de vendas diferidas com $\boldsymbol{Q_w = 1\,597}$; $\boldsymbol{SLM1 = 1 - \frac{E[\eta(X,r)]}{Q} = \alpha_1 = 0,98,}$ ou seja, $\boldsymbol{E[\eta(X,r)] = 0,02Q = 31,942}$; $\boldsymbol{\mu = 416,7}$; $\boldsymbol{\sigma = 183,71.}$ Então, aplicando (3.161), tem-se

$$\boldsymbol{t^3 - \frac{183{,}71}{0{,}02*1597}t^2 - \frac{183{,}71}{0{,}04*1597}t - \frac{183{,}71}{0{,}12*1597} = 0}$$

cuja raiz é $\boldsymbol{t = 6,237,}$ vindo $\boldsymbol{r = 1\,563}$ e $\boldsymbol{Stock\ Segurança = 1\,145,8,}$ valores bastante elevados quando comparados com os do modelo aleatório correspondente.

Se $\boldsymbol{SLM1 = 95\%,}$ teremos $\boldsymbol{r = 925}$ e $\boldsymbol{Stock\ Segurança = 508,2}$, com $\boldsymbol{t = 2,766.}$ Ou seja, o ponto de encomenda é muito sensível ao número máximo de unidades diferidas que se estabelece.

Por outro lado, mantendo $\boldsymbol{SLM1 = 98\%}$, mas dispondo da informação adicional de que a distribuição da procura é simétrica, os resultados, quer do ponto de encomenda quer do stock de segurança, vêm substancialmente reduzidos. Com efeito, neste caso tem-se:$\boldsymbol{t = 3,348}$; $\boldsymbol{r = 1\,032; Stock\ Segurança = 615,1}$.

Com a medida $\boldsymbol{SLM2 = 0,5}$, vem, após aplicar (3.162), $\boldsymbol{t = 3,539}$, $\boldsymbol{r = 1\,067\ e\ Stock\ Segurança = 650,1.}$ No caso de simetria da procura, os valores da política seriam: $\boldsymbol{t = 2,502}$, $\boldsymbol{r = 876}$ e $\boldsymbol{Stock\ Segurança = 459,7.}$

20. Modelos de Calendário $\langle R, T\rangle$ em Futuro Incerto

Nos modelos de calendário continua a supor-se que apenas se conhecem a média e a variância da procura, em qualquer período de tempo, e a abordagem será semelhante, estabelecendo limites superiores para o valor esperado do número de unidades em ruptura ou para a probabilidade de ruptura, minimizando-se o custo máximo esperado que resulta desses limites superiores. Eventualmente o conhecimento adicional de que a variável aleatória é simétrica permite melhorar os resultados, na medida em que é uma informação adicional.

20. 1 Modelo $\langle R, T\rangle$ de Vendas Diferidas e Custos de Ruptura Variáveis

Relembremos a expressão do custo médio anual esperado

$$\boldsymbol{CT(R,T) = \frac{K}{T} + IC\left[R - \mu - \frac{TD}{2}\right] + p\frac{1}{T}\int_R^{\infty}(x_{L+T} - R)f(x_{L+T})dx_{L+T}}$$

Trata-se de estabelecer um limite superior para o valor esperado do número de unidades diferidas anualmente, $\boldsymbol{p\frac{1}{T}\int_R^{\infty}(x_{L+T} - R)f(x_{L+T})dx_{L+T}}$, fazendo $\boldsymbol{R = \mu_{T+L} + t\sigma_{T+L}}$, daí decorrendo a expressão para o custo máximo esperado anualmente, que se procura minimizar,

$$\boldsymbol{CT(t,T) \leq \frac{K}{T} + IC\left[t\sigma_{T+L} + \frac{TD}{2}\right] + p\frac{1}{T}\sigma_{T+L}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6t^3}\right) = \overline{CT(t,T)}} \qquad (3.163)$$

A minimização em ordem a t, à semelhança do que foi feito nos modelos de ponto de encomenda, implica

$$\boldsymbol{\frac{\partial \overline{CT}}{\partial t} = IC\sigma_{T+L} - p\frac{1}{T}\sigma_{T+L}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{2t^4}\right) = 0}$$

Ou seja,

$$\boldsymbol{t^4 - \frac{p}{ICT}t^2 - \frac{p}{ICT}t - \frac{p}{2ICT} = 0} \tag{3.164}$$

cuja solução permite determinar a política para T dado, isto é, para um período de revisão estabelecido.

Exemplo 48. Considere-se o exemplo 32, mas em que se desconhece o comportamento probabilístico da procura, embora se conheça a procura média e o desvio padrão por unidade de tempo, e as revisões estão fixadas quadrimestralmente. A informação disponível é então a seguinte:

$\boldsymbol{D = 1\,200}$; $\boldsymbol{C = 100}$; $\boldsymbol{K(A+J) = 1\,000}$; $\boldsymbol{I = 0,12}$; $\boldsymbol{IC = 12}$; $\boldsymbol{p = 200}$; $\boldsymbol{T = \frac{4}{12} = 0,33(3)}$; $\boldsymbol{L = \frac{1}{52} = 0,0192}$;
$\boldsymbol{\mu = 23,1}$; $\boldsymbol{\sigma = 9,61}$; $\boldsymbol{\mu_{L+T} = 423,1,}$; $\boldsymbol{\sigma_{L+T} = 41,14.}$

Os resultados obtidos foram $\boldsymbol{t = 7,554}$; $\boldsymbol{R = 734}$; $\boldsymbol{Stock\ Segurança = 310,7}$; $\boldsymbol{\overline{CT(R,T)} = 12\,622}$ **€,** resultados que se podem considerar relativamente modestos, em comparação com os obtidos em contexto aleatório. Note-se que o custo de ruptura unitário é, em termos relativos, muito elevado. A utilização de um custo de ruptura de 20, em vez de 200, dá os seguintes resultados: $\boldsymbol{t = 2,68}$; $\boldsymbol{R = 534}$; $\boldsymbol{Stock\ Segurança = 110,5}$; $\boldsymbol{\overline{CT(R,T)} = 7\,837}$ €.

A informação adicional de que a procura é simétrica, com $\boldsymbol{p = 200}$, permite melhorar um pouco os resultados. Neste caso, tem-se: $\boldsymbol{t = 5,476}$; $\boldsymbol{R = 648}$; $\boldsymbol{Stock\ Segurança = 225,3}$; $\boldsymbol{\overline{CT(R,T)} = 10\,575}$. Com $\boldsymbol{p = 20}$, os resultados seriam: $\boldsymbol{t = 2,01}$; $\boldsymbol{R = 506}$; $\boldsymbol{Stock\ Segurança = 82,8}$; $\boldsymbol{\overline{CT(R,T)} = 7\,184}$ €.

20. 2 Modelo $\langle R, T\rangle$ de Vendas Diferidas e Custo de Ruptura Fixo

Neste caso a expressão do custo médio anual é dada por

$$\boldsymbol{CT(R,T) = \frac{K}{T} + IC\left[R - \mu - \frac{TD}{2}\right] + p\frac{1}{T}P(X_{T+L} > R)}$$

vindo

$$\boldsymbol{CT(t,T) \leq \frac{K}{T} + IC\left[t\sigma_{T+L} - \frac{TD}{2}\right] + p\frac{1}{T}\frac{1}{t^2} = \overline{CT(t,T)}} \quad (3.165)$$

Ou seja, para $\boldsymbol{T}$ dado**,**

$$\boldsymbol{t = \sqrt[3]{\frac{2p}{ICT\sigma_{T+L}}}} \quad (3.166)$$

cuja solução permite determinar a política para $\boldsymbol{T}$ dado, isto é, para um período de revisão estabelecido.

Exemplo 49. Considere-se o exemplo 33, isto é, o exemplo anterior mas com um custo de ruptura fixo de 1 000 €. Isto é,

$\boldsymbol{D = 1\,200}$; $\boldsymbol{C = 100}$; $\boldsymbol{K(A+J) = 1\,000}$; $\boldsymbol{I = 0,12; IC = 12}$; $\boldsymbol{p = 1\,000}$; $\boldsymbol{T = \frac{4}{12} = 0,33(3)}$; $\boldsymbol{L = \frac{1}{52} = 0,0192}$;
$\boldsymbol{\mu = 23,1}$; $\boldsymbol{\sigma = 9,61}$; $\boldsymbol{\mu_{L+T} = 423,1,; \sigma_{L+T} = 41,14.}$

Os resultados obtidos foram $\boldsymbol{t = 2,299; R = 498; Stock\ Segurança = 94,6}$; $\boldsymbol{\overline{CT(R,T)} = 7\,103}$ **€,** resultados já mais próximos dos do correspondente modelo aleatório. A informação de que a procura é simétrica permite ainda melhorar mais os resultados, vindo $\boldsymbol{t = 1,825; R = 518; Stock\ Segurança = 75,1}$; $\boldsymbol{\overline{CT(R,T)} = 6\,751}$€.

20. 3 Modelo $\langle R, T\rangle$ de Vendas Diferidas e Custos de Ruptura Fixo e Variáveis

Neste caso a expressão do custo médio anual é dada por

$$CT(R,T) = \frac{K}{T} + IC\left[R - \mu - \frac{TD}{2}\right] + p_f \frac{1}{T} P(X_{T+L} > R) + p_v \frac{1}{T} \int_R^{\infty} (x_{L+T} - R) f(x_{L+T}) dx_{L+T}$$

vindo

$$CT(t,T) \leq \frac{K}{T} + IC\left[t\sigma_{T+L} - \frac{TD}{2}\right] + p_f \frac{1}{T}\frac{1}{t^2} + p_v \frac{1}{T} \sigma_{T+L}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6t^3}\right) = \overline{CT(t,T)} \qquad (3.167)$$

A condição de estacionariedade é então

$$\frac{\partial \overline{CT}}{\partial t} = IC\sigma_{T+L} - 2\frac{p_f}{Tt^3} - \frac{p_v}{T}\sigma_{T+L}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{2t^4}\right) = 0$$

ou seja

$$t^4 - \frac{p_v}{ICT} t^2 - \left(\frac{p_v}{ICT} + 2\frac{p_f}{ICT\sigma_{T+L}}\right) t - \frac{p_v}{2ICT} = 0 \qquad (3.168)$$

cuja solução permite determinar a política para T dado, isto é, para um período de revisão estabelecido.

Exemplo 50. Considere-se por exemplo um sistema de calendário com os seguintes parâmetros: $D = 1\,200$; $C = 100$; $K(A+J) = 1\,000$; $I = 0,12$; $IC = 12$; $p_v = 20$; $p_f = 1\,000$; $T = \frac{4}{12} = 0,33(3)$; $L = \frac{1}{52} = 0,0192$; $\mu = 23,1$; $\sigma = 9,61$; $\mu_{L+T} = 423,1,$; $\sigma_{L+T} = 41,14.$

Aplicando (3.168), vem $t = 3,614$; $R = 572$; $Stock\ Segurança = 148,7$; $\overline{CT(R,T)} = 8\,634$€.

Nota. As simplificações já referidas podem igualmente ser feitas aqui. Assim, quando p_f é muito pequeno quando comparado com p_v subsitui-se em (3.168) p_v por $p = p_v + p_f$ e faz-se $p_f = 0$; quando p_v é muito pequeno quando comparado com $p_{f,}$ substitui-se este por $p = p_v + p_f$ e faz-se $p_v = 0$. Mas obtêm-se resultados menos rigorosos.

20. 4 Modelo $\langle R,T\rangle$ de Vendas Perdidas e Custos de Ruptura Variáveis

Neste caso a expressão do custo médio anual é dada por

$$\boldsymbol{CT(R,T)=\frac{K}{T}+IC\left[R-\mu-\frac{TD}{2}\right]+(IC+\frac{p}{T})\int_R^{\infty}(R-x_{L+T})f(x_{L+T})dx_{L+T}}$$

ou seja,

$$\boldsymbol{CT(t,T)\leq\frac{K}{T}+IC\left[t\sigma_{T+L}-\frac{TD}{2}\right]+(IC+p\frac{1}{T})\sigma_{T+L}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}\right)=\overline{CT(t,T)}} \quad (3.169)$$

Miinimizando em ordem a t, vem

$$\boldsymbol{\frac{\partial\overline{CT}}{\partial t}=IC\sigma_{T+L}-(IC+p\frac{1}{T})\sigma_{T+L}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}+\frac{1}{2t^4}\right)=0}$$

cuja solução, para T dado, é a raiz da equação

$$\boldsymbol{t^4-(1+\frac{p}{ICT})t^2-(1+\frac{p}{ICT})t-(1+\frac{p}{ICT})\frac{1}{2}=0} \quad (3.170)$$

Exemplo 51. considere-se o exemplo 34, mas com desconhecimento da função de densidade da procura. Os dados são os seguintes:

$\boldsymbol{D=10\ 000}$ unidades; $\boldsymbol{T=\frac{3}{12}=0,25}$ anos; $\boldsymbol{L=\frac{0,5}{12}}=0{,}042$ anos;$\boldsymbol{C=57,5}$ \$; $\boldsymbol{I=0,15}$; $\boldsymbol{IC=0,15*57,5=8,625}$ \$;

$\boldsymbol{p=9,5}$ \$; $\boldsymbol{A=1\ 100;\ J=300\ \$;\ \mu=\frac{0,5}{12}*10\ 000=416,7;\sigma=900\sqrt{\frac{0,5}{12}}=183,71;\ \mu_{L+T}=2\ 916,7;\ \sigma_{L+T}=486,1.}$

Os resultados obtidos são:
$\boldsymbol{t = 2,776; R = 4\,266; Stock\ Segurança(máx) = 1\,559,6;\ \overline{CT(t,T)} = 41\,423}$ \$, valores bastante acima dos obtidos como correspondente modelo aleatório.

Considerando simetria no comportamento da procura, vem: $\boldsymbol{t = 2,078; R = 3\,927; Stock\ Segurança(máx) = 1\,159,5;\ \overline{CT(t,T)} = 35\,662}$ \$.

20. 5 Modelo $\langle R, T\rangle$ de Vendas Perdidas e Custos de Ruptura Fixo e Variáveis

Como já dissemos atrás, pelo menos o lucro não realizado com a perda da venda é proporcional, pelo que o custo de ruptura tem, neste caso, duas componentes, uma fixa e uma variável. Sendo $\boldsymbol{p_f}$ o custo de ruptura fixo e $\boldsymbol{p_v}$ o custo de ruptura proporcional, incluindo o benefício não realizado, o valor esperado dos custos anuais é, como se sabe, dado por

$$\boldsymbol{CT(R,T) = \frac{K}{T} + IC\left[R - \mu - \frac{TD}{2} + \int_R^\infty (R - x_{L+T}) f(x_{L+T}) dx_{L+T}\right] + \frac{p_f}{T}\int_R^\infty f(x_{L+T}) dx_{L+T} + \frac{p_v}{T}\int_R^\infty (R - x_{L+T}) f(x_{L+T}) dx_{L+T}}$$

Assumindo novamente que se as médias e variâncias para a procura por unidade de tempo são conhecidas, e fazendo $\boldsymbol{R = \mu_{T+L} + t\sigma_{T+L}}$, vem, sucessivamente

$$\boldsymbol{CT(t,T) \le \frac{K}{T} + IC\left[t\sigma_{T+L} - \frac{TD}{2}\right] + \frac{p_f}{T}\frac{1}{t^2} + (IC + \frac{p_v}{T})\sigma_{T+L}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6t^3}\right) = \overline{CT(t,T)}} \tag{3.171}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial \overline{CT}}{\partial t} = IC\sigma_{T+L} - 2\frac{p_f}{Tt^3} - (IC + \frac{p_v}{T})\sigma_{T+L}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \frac{1}{2t^4}\right) = 0}$$

ou

$$\boldsymbol{t^4 - (1+\frac{p_v}{ICT})t^2 - (1+\frac{p_v}{ICT}+2\frac{p_f}{ICT\sigma_{T+L}})t - (1+\frac{p_v}{ICT})\frac{1}{2} = 0} \quad (3.172)$$

Exemplo 52. Considere-se o exemplo anterior, mas em que adicionalmente existe um custo de ruptura fixo de 3 000 \$. Neste caso $\boldsymbol{t = 3,056}$; $\boldsymbol{R = 4\,402}$; $\boldsymbol{Stock\ Segurança(máx) = 1\,673,2,6}$; $\boldsymbol{\overline{CT(t,T)} = 42\,833}$ \$. Se assumirmos simetria, os valores baixam e são $\boldsymbol{t = 2,315}$; $\boldsymbol{R = 4\,042}$; $\boldsymbol{Stock\ Segurança(máx) = 1\,387,6}$; $\boldsymbol{\overline{CT(t,T)} = 36\,904}$**\$.**

Nota. Também aqui se pode aplicar a nota anterior (ver nota da página 109).

20. 6 Modelo $\langle \boldsymbol{R,T} \rangle$ com Nível de Serviço

Tal como nos modelos aleatórios, o desconhecimento dos custos de ruptura ou a pouca confiança nas suas estimativas, leva também aqui ao estabelecimento de medidas de performance, ou níveis de Serviço. A metodologia é semelhante. As duas medidas do nível de serviço consideradas têm a ver com a probabilidade máxima de ruptura em que se quer incorrer (*SLM2*), ou com o número esperado máximo de unidades em ruptura (*SLM1*). Trata-se de estabelecer valores máximos para essas medidas utilizando as desigualdades anteriores, como temos feito, e determinar o $\boldsymbol{t}$ correspondente, o qual permite seguidamente determinar o nível da Política $\boldsymbol{R}$, para um $\boldsymbol{T}$ dado e previamente fixado. Note-se que também agora, como se desconhecem os custos de ruptura, não se minimizam os custos esperados máximos.

1. Medida *SLM1*

Esta medida estabelece uma proporção (ou percentagem) para a procura esperada que é anualmente satisfeita, isto é

$$\boldsymbol{SLM1 = 1 - \frac{E[\eta(R,T)]\frac{1}{T}}{D} = \alpha_1} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{E[\eta(R,T)] = (1-\alpha_1)TD}$$

para $\boldsymbol{T}$ dado.

Depois de fixado o valor $\boldsymbol{\alpha_1}$ para o nível de serviço ***SLM1*,** obtém- se o valor de $\boldsymbol{R}$, que caracteriza a política, a partir da relação

$$E[\eta(R,T)] = \int_R^{\infty}(R - x_{L+T})f(x_{L+T})dx_{L+T} = (1-\alpha_1)TD \leq \sigma_{T+L}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{6t^3}\right) \tag{3.173}$$

quando se faz $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\mu_{T+L}} + \boldsymbol{t\sigma_{T+L}}$. Para obter $\boldsymbol{t}$, basta resolver a seguinte equação que resulta de (3.173), isto é,

$$t^3 - \frac{\sigma_{T+L}}{(1-\alpha_1)TD}t^2 - \frac{\sigma_{T+L}}{2(1-\alpha_1)TD}t - \frac{\sigma_{T+L}}{6(1-\alpha_1)TD} = 0 \tag{3.174}$$

2. Medida *SLM2*

Com esta medida estabelece-se um valor para o número esperado de ciclos durante o ano em que ocorre ruptura. Seja $\boldsymbol{\alpha_2}$ esse valor. Então para $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{\alpha_2}$ fixados,

$$SLM2 = P(X_{L+T} > R)\frac{1}{T} = \alpha_2 \qquad \text{ou} \qquad P(X_{L+T} > R) = \alpha_2 T$$

Fazendo $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\mu_{T+L}} + \boldsymbol{t\sigma_{T+L}}$ e atendendo a que $P(X_{L+T} - \mu_{T+L} > t\sigma_{T+L}) = \alpha_2 T \leq \frac{1}{t^2}$,, obtém- se o valor de $\boldsymbol{R}$ resolvendo a equação

$$t = \sqrt{\frac{1}{\alpha_2 T}} \tag{3.175}$$

Exemplo 53. considere-se o exemplo 36, mas sem conhecimento dos custos de ruptura e da distribuição de probabilidade da procura, com uma medida $\boldsymbol{SLM2 = 0,5}$ e com $\boldsymbol{SLM1 = 0,98}$, e determine-se o nível da política em cada caso.

Relembremos os dados do problema:
$\boldsymbol{D = 1\,200}$; $\boldsymbol{K = 1000}$; $\boldsymbol{IC = 12}$ €; $\boldsymbol{E(X) = \mu = 23,1}$; $\boldsymbol{E(X_{L+T}) = 123,1}$; $\boldsymbol{V(X_{L+T}) = 492,16}$; $\boldsymbol{\sigma_{L+T} = 22,2}$; $\boldsymbol{L = \frac{1}{52}\ anos}$; $\boldsymbol{T = \frac{1}{12}\ anos}$.

Com $\boldsymbol{SLM2 = \alpha_2 = 0,5}$, vem

$$\boldsymbol{t = \sqrt{\frac{1}{0,5 * \frac{1}{12}}} = 4,899}$$

e $\boldsymbol{R = 123,1 + 4,899 * 22,2 \approx 232}$ e $\boldsymbol{Stock\ de\ Segurança = 108,7}$.

Com $\boldsymbol{SLM1 = \alpha_1 = 0,98}$, vem

$$\boldsymbol{t^3 - \frac{22,2}{0,02*100}t^2 - \frac{22,2}{0,04*100}t - \frac{22,2}{0,12*100} = 0}$$

sendo $\boldsymbol{t = 11,587}$; $\boldsymbol{R = 123,1 + 11,587 * 22,2 = 380}$ e $\boldsymbol{Stock\ de\ Segurança = 257,1}$. Atenção que os resultados não são comparáveis pois as medidas do nível de serviço são diferentes, em valor e conceptualmente.

Em síntese, nos modelos em futuro incerto, quando se conhece a média e a variância, mas se desconhece a distribuição de probabilidade da procura, substitui-se a probabilidade de ruptura e o número esperado de unidades em ruptura pelos seus limites superiores obtidos à custa da desigualdade de Tchebychev, operando-se então com esses valores para determinar a política.

21. Bibliografia

- AXATER, Seven, *Inventory Control*, Springer, 2006
- ARROW, K. J., S. Karlin, and H. Scarf, *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*. Stanford, Cal.; Stanford University Press, 1958
- G. HADLEY, G. and T.M. Whitin, *Analysis of Inventory Systems*, Prentice- Hall, 1963
- HILLIER, F.S. and G.J. Lieberman, *Introduction to Operations Research*, 9th ed., McGraw-Hill, New York., 2010
- MAGEE, J. F., *Production Planning and Inventory Control*, McGraw-Hill, 1958
- STARR, Martin Kenneth and David Wendell Miller, *Inventory Control: Theory and Practice,* Prentice- Hall, 1962
- TERSIN, Richard, *Principles of Inventory and Materials Management*, North-Holland, 1988
- TAHA, H. A., *Operations Research: An Introduction*, 9th ed. , Prentice-Hall, 2011
- WAYNE L. Winston, *Operations Research: Applications and Algorithms*, 4th ed., Thomson Brooks/Cole, USA., 2012
- ZIPKIN, Paul H., *Foundations of Inventory Management*, Boston: McGraw Hill, 2000